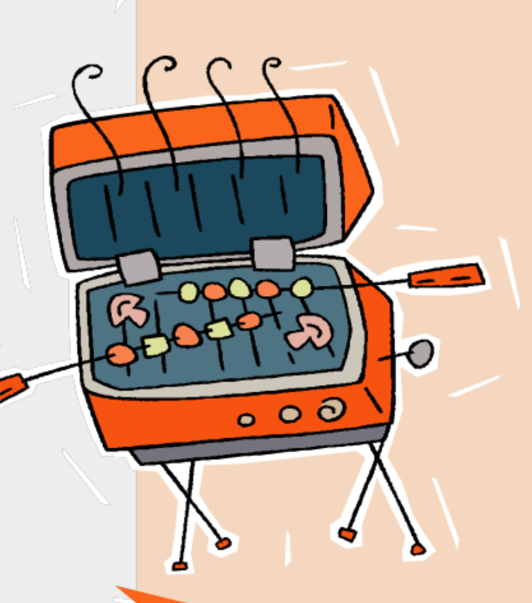



MỘT SẢN PHẨM CỦA FANGAGE TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

**TÀI LIỆU ĐƯỢC PHÁT HÀNH MIỄN PHÍ TẠI BLOG CHINH PHỤC OLYMPIC TOÁN**



*Nguyễn Minh Tuấn*

*K14 Đại học FPT*

# LỜI GIỚI THIỆU

Lượng giác là một vấn đề khá đơn giản trong chương trình toán phổ thông, trong chuyên đề này mình sẽ giới thiệu cho các bạn đọc một số dạng toán hay và khó về chủ đề này, các bài tập chủ yếu được lấy từ trong các đề thi thử THPT Quốc Gia trong cả nước để các bạn có thêm cái nhìn toàn diện về vấn đề này. Để có thể viết nên được chuyên đề này không thể không có sự tham khảo từ các nguồn tài liệu của các các group, các khóa học, tài liệu của các thầy cô mà tiêu biểu là

1. Thầy Lã Duy Tiến – Giáo viên trường THPT Bình Minh
2. Website Toán học Bắc – Trung – Nam: http://toanhocbactrungnam.vn/
3. Website Toanmath: https://toanmath.com/
4. Anh Phạm Minh Tuấn: https://www.facebook.com/phamminhtuan.2810
5. Thầy Huỳnh Đức Khánh

Trong bài viết mình có sưu tầm từ nhiều nguồn nên có thể sẽ có những câu hỏi chưa hay hoặc chưa phù hợp mong bạn đọc bỏ qua. Trong quá trình biên soạn không thể tránh khỏi những thiếu sót, mong bạn đọc có thể góp ý trực tiếp với mình qua địa chỉ sau:

**Nguyễn Minh Tuấn**

Sinh viên K14 – Khoa học máy tính – Đại học FPT

Facebook: https://www.facebook.com/tuankhmt.fpt

Email: tuangenk@gmail.com

Blog: https://lovetoan.wordpress.com/

# PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC NÂNG CAO

*Chinh phục Olympic toán – Nguyễn Minh Tuấn*

## GIỚI THIỆU VỀ ỨNG DỤNG CỦA LƯỢNG GIÁC

***Bài viết dưới đây được lấy từ VMF của thành viên hoangtrong2305!***

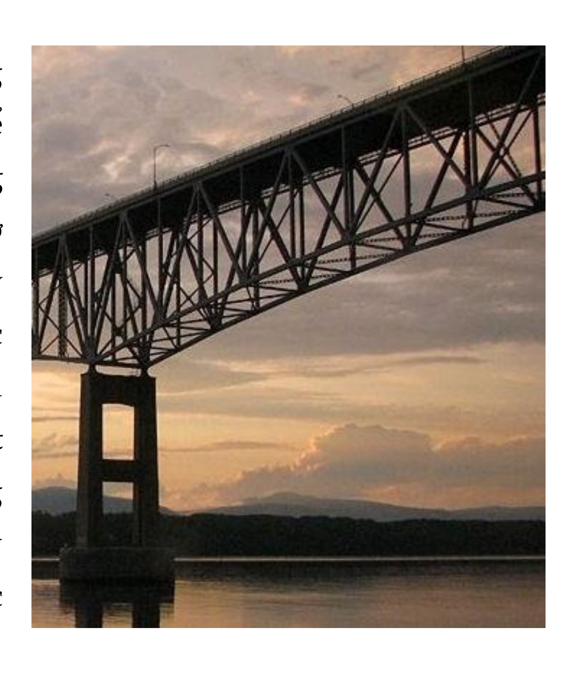
Benny là một độc giả của IntMath Newsletter. Gần đây, ông đã viết:

*"Tôi sẽ đến một trường cao đẳng cộng đồng và sẽ học về lượng giác ở học kỳ tiếp theo. Vì vậy, tôi muốn có cái nhìn sơ nét về những gì tôi sắp học."*

Vâng, Benny, bạn đã thực hiện một bước khởi đầu tốt bằng cách tìm hiểu những gì bạn sắp học trước khi học kỳ bắt đầu. Nhiều học sinh không tìm hiểu về những gì họ đang học cho đến khi họ phải làm các bài tập đầu tiên, khi đó, họ bắt đầu "rối tung" trong việc tìm hiểu cũng như để bắt kịp với phần còn lại của học kỳ.

Từ *lượng giác* xuất phát từ tiếng Hy Lạp, có nghĩa "đo đạc tam giác". Vì vậy, khi học về lượng giác, bạn sẽ vẽ và nghiên cứu nhiều hình tam giác, đặc biệt là tam giác vuông.

### I. SỬ DỤNG LƯỢNG GIÁC



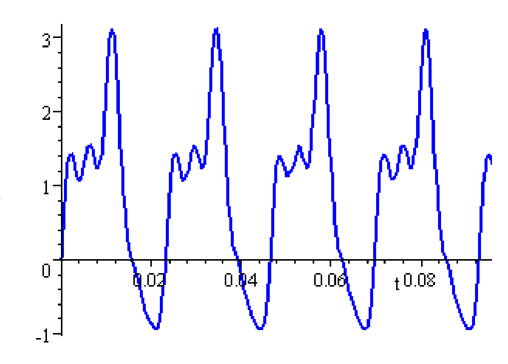
Chúng ta hãy xem xét một số ứng dụng của lượng giác trong cuộc sống hằng ngày. Hôm nay, có thể bạn sẽ lái xe qua 1 cây cầu. Cây cầu được xây dựng bằng cách sử dụng các kiến thức về lực tác dụng ở những góc khác nhau. Bạn sẽ nhận thấy rằng cây cầu gồm nhiều hình tam giác - lượng giác đã được sử dụng khi thiết kế độ dài và độ vững chắc của những hình tam giác đó. Chúng ta hãy xem xét một số ứng dụng của lượng giác trong cuộc sống hằng ngày. Hôm nay, có thể bạn sẽ lái xe qua 1 cây cầu. Cây cầu được xây dựng bằng cách sử dụng các kiến thức về lực tác dụng ở những góc khác nhau.

Bạn sẽ nhận thấy rằng cây cầu gồm nhiều hình tam giác - lượng giác đã được sử dụng khi thiết kế độ dài và độ vững chắc của những hình tam giác đó.



Xe của bạn (hoặc điện thoại) có thể có cài đặt GPS (Global Positioning System - hệ thống định vị trên mặt đất), sử dụng lượng giác cho bạn biết chính xác bạn đang ở đâu trên bề mặt Trái Đất. GPS sử dụng các dữ liệu từ nhiều vệ tinh và các kiến thức về hình học trái đất, sau đó sử dụng lượng giác để xác định vĩ độ và kinh độ của bạn.

Hôm nay, có thể bạn sẽ nghe nhạc. Bài hát bạn nghe được ghi âm kỹ thuật số (một quá trình sử dụng phép chuyển đổi Fourier, có sử dụng lượng giác) được nén thành định dạng MP3 sử dụng nén giảm dữ liệu (áp dụng kiến thức về khả năng phân biệt âm thanh của tai của con người), phép nén này đòi hỏi các kiến thức về lượng giác.

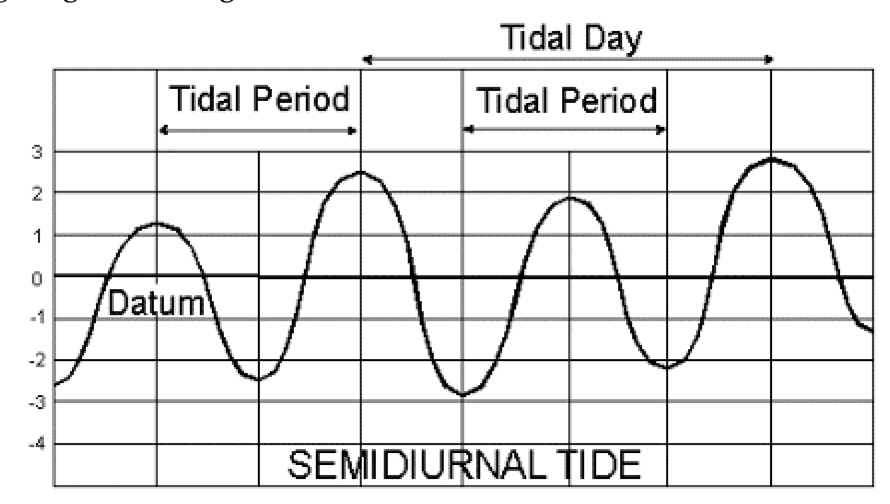



Trên đường đến trường, bạn sẽ vượt qua một tòa nhà cao tầng. Trước khi xây dựng, các kỹ sư sử dụng máy trắc địa để đo đạc khu vực. Sau đó, họ sử dụng phần mềm mô phỏng 3D để thiết kế xây dựng, và xác định góc ánh sáng mặt trời và hướng gió nhằm tính toán nơi đặt các tấm năng lượng mặt trời cũng như hiệu suất năng lượng cao nhất về. Tất cả các quá trình này đòi hỏi sự am hiểu về lượng giác.



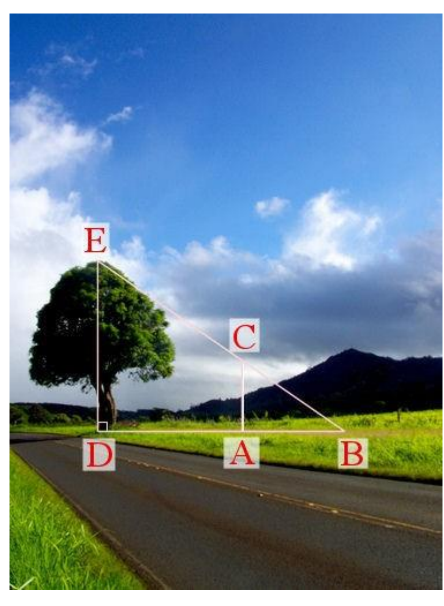
Máy trắc địa

Nếu bạn sống gần biển, thủy triều ảnh hưởng đến những gì bạn có thể làm vào những thời điểm khác nhau trong ngày. Các biểu đồ thủy triều xuất bản cho ngư dân là những dự đoán về thủy triều năm trước. Những dự báo này được thực hiện bằng cách sử dụng lượng giác. Thủy triều là ví dụ về một sự kiện xảy ra có chu kỳ, tức xuất hiện lặp đi lặp lại. Chu kỳ này thường mag tính tương đối.




Trong thực tế, lượng giác có vai trò quan trọng trong hầu hết các lĩnh vực khoa học và kỹ thuật.

## II. NHỮNG GÌ BẠN HỌC TRONG LƯỢNG GIÁC?




Bạn thường bắt đầu nghiên cứu về lượng giác bằng cách tìm hiểu hình tam giác được sử dụng để đo lường những điều khó đo lường bằng tay như thế nào. Ví dụ, chiều cao của núi và cây có thể được xác định bằng cách sử dụng các hình tam giác tương ứng.

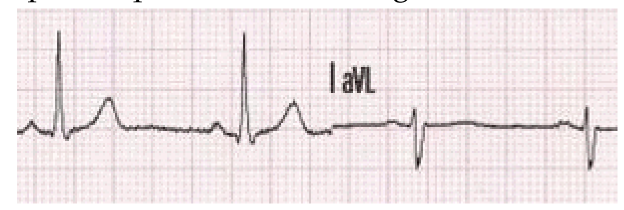
Tôi có thể dễ dàng đo độ dài ABAB và ACAC trong tam giác ABCABC (viết Δ ABC Δ ABC). Sau đó, ta dùng số liệu này để tìm chiều cao DEDE. Tôi có thể làm một quá trình tương tự để tìm chiều cao của ngọn núi.

Điều gì xảy ra nếu các góc trong tam giác khác nhau? "Lượng giác" cho phép chúng ta sử dụng các tỷ lệ có liên quan đến bất kỳ góc nào trong ΔABC ΔABC, vì vậy chúng tôi có thể tính toán một loạt các đỉnh cao mà không cần phải tiến hành đo.

Bạn sẽ tìm hiểu về ba tỷ lệ quan trọng đối với bất kỳ góc độ: **sine** (có thể được rút gọn là sin), **cosine** (có thể được rút gọn là cos) và **tangent** (có thể được rút gọn là tan). Tôi khuyến khích bạn nên tìm hiểu về 3 tỉ lệ này một cách rõ ràng vì phần lớn kiến thức lượng giác sử dụng chúng rất nhiều.

Thông thường chúng ta đo góc bằng độ (°), nhưng đơn vị này không hữu ích lắm cho khoa học và kỹ thuật. Bạn cũng sẽ tìm hiểu về radian, đó là đơn vị đo thay thế cho đơn vị đo góc hữu ích hơn .

Sau khi bạn đã nắm vững những điều cơ bản, bạn sẽ đi tiếp để tìm hiểu về đồ thị của hàm số lượng giác (suy nghĩ về các đường gợn sóng bạn sẽ nhìn thấy trên một đồ thị động đất hoặc một hình trái tim) và sau đó phân tích lượng giác, cho bạn một tập các phương pháp để giải quyết các vấn đề phức tạp một cách dễ dàng hơn.




ECG của một bệnh nhân 26 tuổi.

## III. LỜI KHUYÊN CHO VIỆC HỌC LƯỢNG GIÁC

***Vẽ thật nhiều.*** Vẽ chắc chắn sẽ giúp bạn có sự hiểu biết về lượng giác. Khi bạn cần phải giải quyết vấn đề sau này, việc vẽ đồ thị thực sự có giá trị khi bạn có thể phác thảo các vấn đề một cách nhanh chóng và chính xác. Đặc biệt:

- Vẽ hình tam giác mà bạn đang theo học.
- Phác họa tình huống trong những vấn đề xung quanh.

- Thực hành vẽ đồ thị hàm sin và cosin cho đến khi bạn có thể làm điều đó mà không cần phải chấm hàng triệu điểm trên trang giấy.

***Học các kiến thức cơ bản thật chắc.*** Kiến thức "cơ bản" là:

- Các định nghĩa của sin, cos và tan và làm thế nào để sử dụng chúng trong tam giác;
- Dấu tỷ lệ lượng giác của các góc lớn hơn $90^\circ$ (tức là biết khi nào giá trị đó là dương hay âm)
- Các đồ thị hàm $y = \sin x$ và $y = \cos x$ (và các khái niệm về hàm tuần hoàn)

***Cẩn thận khi dùng máy tính.*** Các vấn đề thường gặp nhất khi sử dụng máy tính cầm tay trong lượng giác bao gồm:

- Thiết lập sai chế độ (ví dụ như máy tính ở chế độ "độ" khi bạn đang tính toán trong chế độ radian)
- Tin tưởng vào máy tính hơn não của bạn. Các máy tính sẽ không luôn luôn cung cấp cho bạn dấu chính xác (+ hoặc -). Thường thì bạn phải tự tìm hiểu.
- Luôn ước lượng câu trả lời của bạn, đầu tiên, do đó bạn có thể kiểm tra kết quả mà máy tính cho bạn.
- Hãy chắc chắn rằng bạn biết lý do tại sao máy tính của bạn không sử dụng "$\sin^{-1}$" hoặc "$\cos^{-1}$". Điều này nhiều học sinh hay lẫn lộn và sử dụng các ký hiện trên không thật sự cần thiết. Chúng ta nên sử dụng $\arcsin\theta$ để không bị nhầm lẫn với $\dfrac{1}{\sin\theta}$.

Đây là câu trả lời của tôi dành cho Benny. Tôi hy vọng đã cung cấp cho bạn ý tưởng về cách sử dụng kiến thức lượng giác, Đáng buồn thay, nhiều học sinh không mấy thích lượng giác. Bạn sẽ không cảm thấy sợ hãi nữa khi bạn hiểu lượng giác dùng vào việc gì cũng như thực hiện các lời khuyên trên.

Nguồn: http://www.intmath.c...-all-about-6163

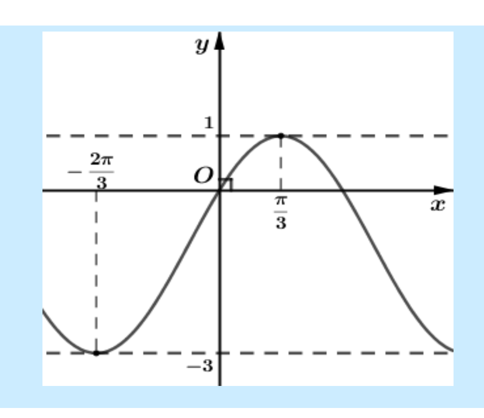
## BÀI TẬP TỔNG HỢP

**Câu 1.** Đường cong trong hình bên mô tả đồ thị của hàm số $y = A\sin(x+\alpha)+B$ (với $A$, $B$, $\alpha$ là các hằng số và $\alpha \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$). Tính $S = A + B + \frac{12\alpha}{\pi}$.



**A.** $S = 1.$ **B.** $S = 2.$

**C.** $S = 3.$ **D.** $S = 5.$




*Lời giải*

Dựa vào đồ thị hàm số ta có hệ phương trình $\begin{cases} A\sin\left(-\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)+B=-3 & (1) \\ A\sin\alpha + B = 0 & (2) \\ A\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+B=1 & (3) \end{cases}$

Ta thấy $A = 0$ không thỏa mãn hệ. Do đó $(3) \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) = \frac{1-B}{A}$. $(4)$

Từ $(1) \Rightarrow -A\sin\left(\pi - \frac{2\pi}{3}+\alpha\right)+B=-3 \Leftrightarrow -A\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+B=-3 \xrightarrow{(4)} B=-1$

Thay $B=-1$ vào $(2)$ và $(3)$, ta có hệ $\begin{cases} A\sin\alpha = 1 \\ A\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=2 \end{cases} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) = 2\sin\alpha$

$\Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha = 2\sin\alpha \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos\alpha = 3\sin\alpha \Leftrightarrow \tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \xrightarrow{\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} \alpha = \frac{\pi}{6}.$

Với $\alpha = \frac{\pi}{6} \Rightarrow A = 2.$ Vậy $\begin{cases} A = 2;\ B = -1 \\ \alpha = \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow S = A + B + \frac{12\alpha}{\pi} = 3.$

**Chọn C.**

***Nhận xét.*** Cách trắc nghiệm: nhìn đồ thị đoán được $A = 2;\ B = -1$ (dựa vào min – max) và dùng dữ kiện đồ thị đi qua gốc tọa độ suy ra $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

**Câu 2.** Gọi $n$ là số nguyên thỏa mãn $\left(1+\tan 1^0\right).\left(1+\tan 2^0\right)\cdots\left(1+\tan 45^0\right) = 2^n$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $n \in [1;7]$. **B.** $n \in [8;19]$. **C.** $n \in [20;26]$. **D.** $n \in [27;33]$.

*Lời giải*

Ta có biến đổi: $(1+\tan 1°).(1+\tan 2°)\cdots(1+\tan 45°)$

$$=\frac{(\cos 1^\circ+\sin 1^\circ)}{\cos 1^\circ}\times\frac{(\cos 2^\circ+\sin 2^\circ)}{\cos 2^\circ}\times\cdots\times\frac{(\cos 45^\circ+\sin 45^\circ)}{\cos 45^\circ}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\sin(1^\circ+45^\circ)}{\cos 1^\circ}\times\frac{\sqrt{2}\sin(2^\circ+45^\circ)}{\cos 2^\circ}\times\cdots\times\frac{\sqrt{2}\sin(45^\circ+45^\circ)}{\cos 45^\circ}$$

$$=\left(\sqrt{2}\right)^{45}.\frac{\cos 44^\circ.\cos 43^\circ.....\cos 2^\circ.\cos 1^\circ}{\cos 1^\circ.\cos 2^\circ.....\cos 43^\circ.\cos 44^\circ}\times\frac{\sin 90^\circ}{\cos 45^\circ}$$

$$=\left(\sqrt{2}\right)^{45}.\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)=\left(\sqrt{2}\right)^{45}.\sqrt{2}=2^{23}\Rightarrow n=23.$$

**Chọn C.**

**Câu 3.** Tìm số nguyên dương $n$ nhỏ nhất của thỏa mãn

$$\frac{1}{\sin 45^0.\sin 46^0}+\frac{1}{\sin 46^0.\sin 47^0}+\cdots+\frac{1}{\sin 134^0.\sin 135^0}=\frac{2}{\sin n^0}.$$

**A.** $n=1$. **B.** $n=45$. **C.** $n=46$. **D.** $n=91$.

***Lời giải***

Đặt $P=\frac{1}{\sin 45^\circ.\sin 46^\circ}+\frac{1}{\sin 46^\circ.\sin 47^\circ}+\cdots+\frac{1}{\sin 134^\circ.\sin 135^\circ}$

$\Rightarrow \sin 1^\circ.P=\frac{\sin 1^\circ}{\sin 45^\circ.\sin 46^\circ}+\frac{\sin 1^\circ}{\sin 46^\circ.\sin 47^\circ}+\cdots+\frac{\sin 1^\circ}{\sin 134^\circ.\sin 135^\circ}$

$\Rightarrow \sin 1^\circ.P=\cot 45^\circ-\cot 46^\circ+\cot 46^\circ-\cot 47^\circ+...+\cot 134^\circ-\cot 135^\circ$

$\Rightarrow \sin 1^\circ.P=\cot 45^\circ-\cot 135^\circ=2\Rightarrow P=\frac{2}{\sin 1^\circ}\Rightarrow n=1.$

**Chọn A.**

**Câu 4.** Cho góc $\alpha$ thỏa $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ và $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{2}$. Tính $P=\sin\alpha-\cos\alpha$.

**A.** $P=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $P=\frac{1}{2}$. **C.** $P=-\frac{1}{2}$. **D.** $P=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

***Lời giải***

Ta có $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2+(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=2$.

Suy ra $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2-(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=2-\frac{5}{4}=\frac{3}{4}$.

Do $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ suy ra $\sin\alpha<\cos\alpha$ nên $\sin\alpha-\cos\alpha<0$. Vậy $P=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**Chọn D.**

**Câu 5.** Cho góc $\alpha$ thỏa mãn $\tan\alpha=-\frac{4}{3}$ và $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$. Tính $P=\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}$.

**A.** $P=\sqrt{5}$. **B.** $P=-\sqrt{5}$. **C.** $P=-\frac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $P=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

***Lời giải***

Ta có $P^2 = 1 + \sin\alpha$. Với $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right] \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \in \left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$.

Khi đó $\begin{cases} 0 \le \sin\frac{\alpha}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 \le \cos\frac{\alpha}{2} < -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$, suy ra $P = \sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} < 0$.

Từ hệ thức $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, suy ra $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{16}{25}$.

Vì $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ nên ta chọn $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$.

Thay $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ vào $P^2$, ta được $P^2 = \frac{1}{5}$. Suy ra $P = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

**Chọn C.**

**Câu 6.** Cho phương trình $\cos 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{5}{2}$. Nếu đặt $t = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$ thì phương trình đã cho trở thành phương trình nào dưới đây?

**A.** $4t^2 - 8t + 3 = 0$. **B.** $4t^2 - 8t - 3 = 0$. **C.** $4t^2 + 8t - 5 = 0$. **D.** $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{4} \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$

*Lời giải*

Ta có $\cos 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 - 2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 - 2\cos^2\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$.

Do đó phương trình tương đương với $-2\cos^2\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \frac{3}{2} = 0$

$\Leftrightarrow -4\cos^2\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + 8\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - 3 = 0$.

Nếu đặt $t = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$ thì phương trình trở thành $-4t^2 + 8t - 3 = 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 8t + 3 = 0$.

**Chọn A.**

**Câu 7.** Biểu diễn tập nghiệm của phương trình $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$ trên đường tròn lượng giác ta được số điểm cuối là

**A.** 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

*Lời giải*

Ta có $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x \cos x + \cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{4} \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$ và các điểm này không trùng nhau nên tập nghiệm của phương trình đã cho có 6 điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác.

**Chọn D.**

**Câu 8.** Có bao nhiêu giá trị của $\alpha$ thuộc $[0;2\pi]$ để ba phần tử của $S=\{\sin\alpha,\sin 2\alpha,\sin 3\alpha\}$ trùng với ba phần tử của $T=\{\cos\alpha,\cos 2\alpha,\cos 3\alpha\}$.

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

*Lời giải*

Vì $S=T\Rightarrow \sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha=\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha$

$\Leftrightarrow 2\sin 2\alpha\cos\alpha+\sin 2\alpha=2\cos 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha \Leftrightarrow \sin 2\alpha(2\cos\alpha+1)=\cos 2\alpha(2\cos\alpha+1)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2\alpha=\cos 2\alpha\\ \cos\alpha=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha=\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2}\\ \alpha=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

Thử lại ta thấy chỉ có $\alpha=\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$ thỏa $S=T$.

Vì $\alpha\in[0;2\pi]\Rightarrow 0\le\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2}\le 2\pi\Leftrightarrow -\dfrac{1}{4}\le k\le\dfrac{15}{4}\Rightarrow k\in\{0;1;2;3\}$.

**Chọn D.**

**Câu 9.** Phương trình $2^{n+1}\cos x.\cos 2x.\cos 4x.\cos 8x...\cos 2^n x=1$ với $n\in\mathbb{N}^*$ có tập nghiệm trùng với tập nghiệm của phương trình nào sau đây?

**A.** $\sin x=0$. **B.** $\sin x=\sin 2^n x$. **C.** $\sin x=\sin 2^{n+1}x$. **D.** $\sin x=\sin 2^{n+2}x$.

*Lời giải*

Vì $x=k\pi$ không là nghiệm của phương trình đã cho nên nhân hai vế phương trình cho $\sin x$, ta được $2^{n+1}(\sin x\cos x).\cos 2x.\cos 4x.\cos 8x...\cos 2^n x=\sin x$

$$\Leftrightarrow 2^n(\sin 2x).\cos 2x.\cos 4x.\cos 8x...\cos 2^n x=\sin x$$
$$\Leftrightarrow 2^n(\sin 2x.\cos 2x).\cos 4x.\cos 8x...\cos 2^n x=\sin x$$
$$\Leftrightarrow 2^{n-1}(\sin 2^2 x).\cos 4x.\cos 8x...\cos 2^n x=\sin x$$
$$\vdots$$
$$\Leftrightarrow \sin 2^{n+2}x=\sin x.$$

**Chọn D.**

**Câu 10.** Tính diện tích của đa giác tạo bởi các điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn các nghiệm của phương trình $\tan x+\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$.

**A.** $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

*Lời giải*

Điều kiện: $\begin{cases}\cos x\ne 0\\ \cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x\ne\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{cases}\quad (k\in\mathbb{Z}).$

Ta có $\tan x+\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow \tan x+\frac{\tan x+1}{1-\tan x}=1$

$\Leftrightarrow \tan x-\tan^2 x+\tan x+1=1-\tan x$

$\Leftrightarrow \tan^2 x-3\tan x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=0\\ \tan x=3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\arctan 3+k\pi\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).$

- Nghiệm $x=k\pi$ biểu diễn trên đường tròn lượng giác là hai điểm $A, B$ (xem hình vẽ).
- Nghiệm $x=\arctan 3+k\pi$ biểu diễn trên đường tròn lượng giác là hai điểm $M, N$ (xem hình vẽ).

Ta có $S_{\Delta AMN}=\frac{1}{2}MN.AH=\frac{1}{2}.MN.\frac{AO.AT}{\sqrt{AO^2+AT^2}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}\longrightarrow S_{AMBN}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$.

**Chọn B.**

**Câu 11.** Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\sin 5x+2\cos^2 x=1$ có dạng $\frac{\pi a}{b}$ với $a, b$ là các số nguyên và nguyên tố cùng nhau. Tính $S=a+b$.

**A.** $S=3$. **B.** $S=7$. **C.** $S=15$. **D.** $S=17$.

***Lời giải***

Phương trình tương đương với $\sin 5x=1-2\cos^2 x \Leftrightarrow \sin 5x=-\cos 2x$

$\Leftrightarrow \sin 5x=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3}\\ x=\frac{3\pi}{14}+k\frac{2\pi}{7}\end{array}\right.$

$\Rightarrow$Nghiệm dương nhỏ nhất là $\frac{3\pi}{14} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}a=3\\ b=14\end{array}\right. \Rightarrow S=17$

**Chọn D.**

**Câu 12.** Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{1}{1-\cos x}+\cot x=2$ có dạng $\frac{\pi a}{b}$ với $a, b$ là các số nguyên, $a<0$ và $a, b$ nguyên tố cùng nhau. Tính $S=a+b$.

**A.** $S=3$. **B.** $S=4$. **C.** $S=5$. **D.** $S=7$.

***Lời giải***

Điều kiện: $\left\{\begin{array}{l}\cos x\neq \pm 1\\ \sin x\neq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow x\neq k\pi \ (k\in\mathbb{Z})$.

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{\sin x(1-\cos x)+1+\cos x}{\sin^2 x}+\frac{\cos x}{\sin x}=2$

$\Leftrightarrow \sin x+\cos x+1=2\sin^2 x$

$\Leftrightarrow \sin x+\cos x+\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(1+\cos x-\sin x)=0.$

- $\sin x+\cos x=0\Leftrightarrow \tan x=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$
- $1+\cos x-\sin x=0\Leftrightarrow \sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\left(N\right)\\ x=\pi+k2\pi\left(L\right)\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right).$

$\Rightarrow$Nghiệm âm lớn nhất là $-\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=4\end{cases}\Rightarrow S=3$

**Chọn A.**

**Câu 13.** Cho phương trình $\sin x+\sin 5x=2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)-2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}+2x\right)$. Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác là?

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

***Lời giải***

Ta có $\begin{cases}2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)=1+\sin 2x\\ 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}+2x\right)=1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+4x\right)=1-\sin 4x\end{cases}.$

Do đó phương trình tương đương với $\sin x+\sin 5x=\sin 2x+\sin 4x$

$\Leftrightarrow 2\sin 3x\cos 2x=2\sin 3x\cos x$

$\Leftrightarrow 2\sin 3x\left(\cos 2x-\cos x\right)=0.$

- $\sin 3x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{k\pi}{3}\ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$
- $\cos 2x-\cos x=0\Leftrightarrow \cos 2x=\cos x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\dfrac{k2\pi}{3}\end{array}\right.\ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$

Hợp hai trường hợp ta được nghiệm của phương trình đã cho là $x=\dfrac{k\pi}{3}=\dfrac{k2\pi}{6}\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

$\Rightarrow$Có 6 điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác.

**Chọn D.**

**Câu 14.** Cho phương trình $\sin x+\cos x\sin 2x+\sqrt{3}\cos 3x=2\left(\cos 4x+\sin^3 x\right)$. Tổng nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình bằng

**A.** $-\dfrac{\pi}{7}$. **B.** $-\dfrac{\pi}{18}$. **C.** $-\dfrac{\pi}{20}$. **D.** $\dfrac{\pi}{7}$.

***Lời giải***

Phương trình $\Leftrightarrow \sin x+\dfrac{1}{2}\left(\sin 3x+\sin x\right)+\sqrt{3}\cos 3x=2\cos 4x+\dfrac{3\sin x-\sin 3x}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin 3x+\sqrt{3}\cos 3x=2\cos 4x\Leftrightarrow \sin\left(3x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{42}+\frac{k2\pi}{7} \\ x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$$

Suy ra nghiệm âm lớn nhất là $-\frac{\pi}{6}$; nghiệm dương nhỏ nhất là $\frac{\pi}{42}$.

**Chọn A.**

**Câu 15.** Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\cos 3x(2\cos 2x+1)=\frac{1}{2}$ có dạng $\frac{\pi a}{b}$ với $a, b$ là các số nguyên và nguyên tố cùng nhau. Tính $S=a+b$.

**A.** $S=7$. **B.** $S=8$. **C.** $S=15$. **D.** $S=17$.

*Lời giải*

Phương trình $\Leftrightarrow 4\cos 3x\cos 2x+2\cos 3x=1$

$\Leftrightarrow 2(\cos 5x+\cos x)+2\cos 3x=1$

$\Leftrightarrow 2\cos x+2\cos 3x+2\cos 5x=1.$

- Nhận thấy $\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ không thỏa mãn phương trình.
- Nhân hai vế cho $\sin x$ ta được $2\sin x\cos x+2\sin x\cos 3x+2\sin x\cos 5x=\sin x$

$\Leftrightarrow \sin 2x+(\sin 4x-\sin 2x)+(\sin 6x-\sin 4x)=\sin x$

$$\Leftrightarrow \sin 6x=\sin x\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{k2\pi}{5} \\ x=\frac{\pi}{7}+\frac{k2\pi}{7} \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$$

Suy ra nghiệm dương nhỏ nhất là $\frac{\pi}{7}\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=7 \end{cases}\Rightarrow S=8$

**Chọn B.**

**Câu 16.** Cho phương trình $\sin^{2018}x+\cos^{2018}x=2\left(\sin^{2020}x+\cos^{2020}x\right)$. Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác là?

**A.** 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 2020.

*Lời giải*

Phương trình $\Leftrightarrow \sin^{2018}x\left(1-2\sin^2 x\right)+\cos^{2018}x\left(1-2\cos^2 x\right)=0$

$\Leftrightarrow \sin^{2018}x.\cos 2x-\cos^{2018}x\cos 2x=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x=0 \\ \sin^{2018}x=\cos^{2018}x \end{array}\right..$$

- $\cos 2x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z}).$
- $\sin^{2018}x=\cos^{2018}x\Leftrightarrow \tan^{2018}x=1\Leftrightarrow \tan x=\pm 1\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$

Hợp hai trường hợp ta được nghiệm của phương trình đã cho là $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$

$\Rightarrow$Có 4 điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác.

**Chọn B.**

**Câu 17.** Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\tan^{2018}x+\cot^{2018}x=2\sin^{2017}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ có dạng $\frac{\pi a}{b}$ với $a,\ b$ là các số nguyên, $a<0$ và $a,\ b$ nguyên tố cùng nhau. Tính $S=a+b$.

**A.** $S=-3$. **B.** $S=-1$. **C.** $S=1$. **D.** $S=3$.

*Lời giải*

Ta có $\begin{cases}\tan^{2018}x+\cot^{2018}x\ge 2\\ 2\sin^{2017}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le 2\end{cases}$.

Do đó phương trình tương đương với:

$$\begin{cases}\tan x=\cot x\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{4}+k2\pi\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k2\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

$\Rightarrow$Nghiệm âm lớn nhất là $-\frac{7\pi}{4}\Rightarrow\begin{cases}a=-7\\ b=4\end{cases}\Rightarrow S=-3.$

**Chọn A.**

**Câu 18.** Cho phương trình $2^{2017}\left(\sin^{2018}x+\cos^{2018}x\right)\left(\sin x+\cos x\right)\cos x=\frac{\cos 2x}{1-\tan x}$. Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình có dạng $\frac{\pi a}{b}$ với $a,\ b$ là các số nguyên và nguyên tố cùng nhau. Tính $S=a+b$.

**A.** $S=2$. **B.** $S=3$. **C.** $S=4$. **D.** $S=7$.

*Lời giải*

Điều kiện: $\begin{cases}\cos x\ne 0\\ \tan x\ne 1\end{cases}$.

Ta có $\frac{\cos 2x}{1-\tan x}=\frac{\cos^2x-\sin^2x}{1-\frac{\sin x}{\cos x}}=\cos x\left(\cos x+\sin x\right)$.

Do đó phương trình $\Leftrightarrow 2^{2017}\left(\sin^{2018}x+\cos^{2018}x\right)\left(\sin x+\cos x\right)\cos x=\left(\sin x+\cos x\right)\cos x$

$$\Leftrightarrow \cos x\left(\sin x+\cos x\right).\left[2^{2017}\left(\sin^{2018}x+\cos^{2018}x\right)-1\right]=0.$$

- $\cos x=0\ (L)$
- $\sin x+\cos x=0\Leftrightarrow\tan x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.
- $2^{2017}\left(\sin^{2018}x+\cos^{2018}x\right)-1=0\Leftrightarrow 2^{2017}\left(\sin^{2018}x+\cos^{2018}x\right)=1$: Vô nghiệm vì

$$\sin^{2018}x+\cos^{2018}x=2.\left(\frac{a^{1009}+b^{1009}}{2}\right)\ge 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^{1009}=\frac{1}{2^{1008}} \text{ với } a=\sin^2 x,\ b=\cos^2 x.$$

$\Rightarrow$Nghiệm dương nhỏ nhất là $\frac{3\pi}{4}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\b=4\end{cases}\Rightarrow S=7$

**Chọn D.**

**Câu 19.** Biết rằng phương trình $\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\cdots+\frac{1}{\sin 2^{2018}x}=0$ có nghiệm dạng $x=\frac{k2\pi}{2^a-b}$ với $k\in\mathbb{Z}$ và $a,\ b\in\mathbb{Z}^+$, $b<2018$. Tính $S=a+b$.

**A.** $S=2017$. **B.** $S=2018$. **C.** $S=2019$. **D.** $S=2020$.

*Lời giải*

Điều kiện: $\sin 2^{2018}x\ne 0$.

Ta có $\cot a-\cot 2a=\frac{\cos a}{\sin a}-\frac{\cos 2a}{\sin 2a}=\frac{2\cos^2 a-\cos 2a}{\sin 2a}=\frac{1}{\sin 2a}$.

Do đó phương trình $\Leftrightarrow\left(\cot\frac{x}{2}-\cot x\right)+(\cot x-\cot 2x)+...+\left(\cot 2^{2017}x-\cot 2^{2018}x\right)=0$

$$\Leftrightarrow \cot\frac{x}{2}-\cot 2^{2018}x=0$$

$$\Leftrightarrow \cot 2^{2018}x=\cot\frac{x}{2}\Leftrightarrow 2^{2018}x=\frac{x}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{k2\pi}{2^{2019}-1}\quad (k\in\mathbb{Z})$$

$\Rightarrow\begin{cases}a=2019\\b=1\end{cases}\Rightarrow S=a+b=2020.$

**Chọn D.**

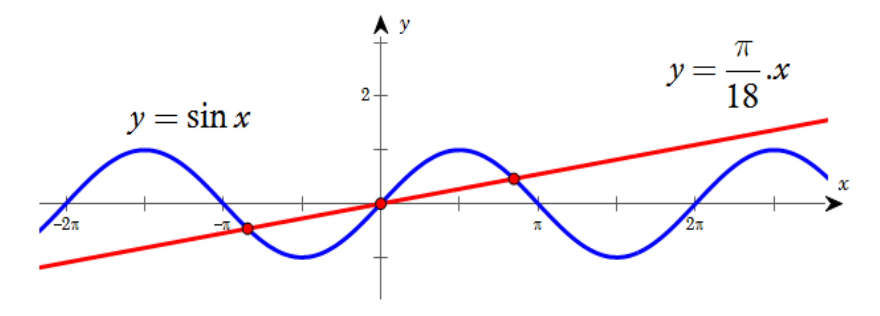
**Câu 20.** Phương trình $\frac{\sin x}{x}=\frac{\pi}{18}$ có bao nhiêu nghiệm?

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

*Lời giải*

Điều kiện: $x\ne 0$. Phương trình $\frac{\sin x}{x}=\frac{\pi}{18}\Rightarrow \sin x=\frac{\pi}{18}x.\ (1)$

Phương trình $(1)$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\sin x$ (có đồ thị là màu xanh như hình vẽ) với đồ thị hàm số $y=\frac{\pi}{18}x$ (có đồ thị là màu đỏ như hình vẽ).



Dựa vào hình vẽ ta thấy hai đồ thị hàm số cắt nhau tại $3$ điểm phân biệt nên phương trình $(1)$ có $3$ nghiệm phân biệt $\Rightarrow$Đối chiếu điều kiện bài toán ta loại nghiệm $x=0$ nên phương trình đã cho có $2$ nghiệm.

**Chọn B.**

**Câu 21.** Phương trình $2\cos^2 x+2\cos^2 2x+2\cos^2 3x-3=\cos 4x(2\sin 2x+1)$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0;2018)$?

**A.** 2565. **B.** 2566. **C.** 2567. **D.** 2568.

***Lời giải***

Phương trình $\Leftrightarrow(1+\cos 2x)+(1+\cos 4x)+(1+\cos 6x)-3=2\cos 4x\sin 2x+\cos 4x$

$$\Leftrightarrow \cos 6x+\cos 2x=2\cos 4x\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 4x\cos 2x-2\cos 4x\sin 2x=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 4x(\cos 2x-\sin 2x)=0$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{4}\ (k\in\mathbb{Z}).$$

$(\cos 4x=\cos^2 2x-\sin^2 2x=(\cos 2x-\sin 2x)(\cos 2x+\sin 2x)$ nên chứa luôn $\cos 2x-\sin 2x)$

Vì $x\in(0;2018)\Rightarrow 0<\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{4}<2018\Leftrightarrow -\frac{1}{2}<k<\left(2018-\frac{\pi}{8}\right)\frac{4}{\pi}\Leftrightarrow -0,5<k<2565,39$

$\Rightarrow k\in\{0;1;2;3;...;2565\}$. Vậy có $2566$ nghiệm.

**Chọn B.**

**Câu 22.** Phương trình $\frac{(1-2\cos x)(1+\cos x)}{(1+2\cos x)\sin x}=1$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0;2018\pi)$?

**A.** 3025. **B.** 3026. **C.** 3027. **D.** 3028.

***Lời giải***

Điều kiện: $(1+2\cos x)\sin x\neq 0$. Phương trình $\Leftrightarrow 1-\cos x-2\cos^2 x=\sin x+2\sin x\cos x$

$$\Leftrightarrow \cos 2x+\cos x+\sin 2x+\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{3x}{2}+\cos\frac{3x}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\frac{x}{2}=0\ (\text{loại})\\ \sin\frac{3x}{2}+\cos\frac{3x}{2}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \tan\frac{3x}{2}=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Vì $x\in(0;2018\pi)\Rightarrow 0<-\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3}<2018\pi\Leftrightarrow\frac{1}{4}<k<\left(2018+\frac{1}{6}\right).\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{4}<k<3027,25.$

$\Rightarrow k\in\{1;2;3;...;3027\}$. Vậy có $3027$ nghiệm.

**Chọn C.**

**Câu 23.** Phương trình $\sin\left[\frac{\pi}{4}\left(3x-\sqrt{9x^2-16x-80}\right)\right]=0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

*Lời giải*

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{\pi}{4}\left(3x-\sqrt{9x^2-16x-80}\right)=k\pi$

$\Leftrightarrow 3x-\sqrt{9x^2-16x-80}=4k$

$\Leftrightarrow \sqrt{9x^2-16x-80}=3x-4k$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x\ge 4k & (1) \\ 9x^2-16x-80=9x^2-24kx+16k^2 & (2) \end{cases}.$

Phương trình $(2)\Leftrightarrow x=\frac{2k^2+10}{3k-2}\Rightarrow 9x=\frac{2(9k^2-4)+98}{3k-2}=2(3k+2)+\frac{98}{3k-2}$

Vì $x\in\mathbb{Z}^+$ nên ta cần có $3k-2=\{1;2;7;14;49;98\}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}\left[\begin{array}{l} k=1\Rightarrow x=12 \\ k=3\Rightarrow x=4 \\ k=17\Rightarrow x=12\,(\text{loại}) \end{array}\right.$.

**Chọn B.**

**Câu 24.** Phương trình $\sin^4 x+\cos^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0;2017\pi)$?

**A.** 4032. **B.** 4033. **C.** 4034. **D.** 4035.

*Lời giải*

Ta có $\begin{cases} \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2} \\ \cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$

Phương trình $\Leftrightarrow \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4(\cos x-\sin x)^4=\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow (1-\cos 2x)^2+(1-\sin 2x)^2=1$

$\Leftrightarrow 3-2(\cos 2x+\sin 2x)=1$

$\Leftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$

Vì $x\in(0;2017\pi)$ nên

- $0<k\pi<2017\pi\Leftrightarrow 0<k<2017\Rightarrow$ Có 2016 nghiệm

- $0<\frac{\pi}{4}+k\pi<2017\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{4}<k<\frac{8067}{4} \Rightarrow$ Có $2017$ nghiệm.

Vậy có tổng cộng $4033$ nghiệm.

**Chọn B.**

**Câu 25.** Tìm số nghiệm của phương trình $\tan 4x-\tan 2x-4\tan x=4\tan 4x.\tan 2x.\tan x$ trên đoạn $[-\pi;\pi]$.

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 7.

***Lời giải***

Điều kiện: $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \cos 2x\neq 0\\ \cos 4x\neq 0\end{cases}$.

Phương trình $\Leftrightarrow \tan 4x-\tan 2x=4\tan x\left(1+\tan 4x.\tan 2x\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{\tan 4x-\tan 2x}{1+\tan 4x.\tan 2x}=4\tan x \text{ (vì } \cos 2x\neq 0\longrightarrow 1+\tan 4x.\tan 2x\neq 0\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \tan 2x=4\tan x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\tan x+\tan x}{1-\tan x\tan x}=4\tan x$$

$$\Leftrightarrow \tan x\left(2\tan^2 x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=0\,(\text{thỏa mãn})\\ \tan x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\,(\text{thỏa mãn})\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\arctan\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+k\pi\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

Vì $x\in[-\pi;\pi]\Rightarrow$ Có tất cả $6$ nghiệm thỏa mãn.

**Chọn C.**

**Câu 26.** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\tan 5x-\tan x=0$ trên $[0;\pi)$ bằng

**A.** $\pi$. **B.** $\frac{3\pi}{2}$. **C.** $2\pi$. **D.** $\frac{5\pi}{2}$.

***Lời giải***

Điều kiện: $\begin{cases}\cos 5x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}$. Phương trình $\Leftrightarrow \tan 5x=\tan x\Leftrightarrow 5x=x+k\pi\Leftrightarrow x=k\frac{\pi}{4}$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Vì $x\in[0;\pi)\Rightarrow 0\le k\frac{\pi}{4}<\pi\Leftrightarrow 0\le k<4\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k\in\{0;1;2;3\}$.

Suy ra $\begin{cases}k=0\Rightarrow x=0\\ k=1\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}\\ k=2\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}\ (\text{loại})\\ k=3\Rightarrow x=\frac{3\pi}{4}\end{cases}\Rightarrow \frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}=\pi.$

**Chọn A.**

**Câu 27.** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\cos(\sin x)=1$ trên đoạn $[0;2\pi]$ bằng

**A.** 0. **B.** $\pi$. **C.** $2\pi$. **D.** $3\pi$.

***Lời giải***

Phương trình tương đương với $\sin x = k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Vì $-1\le \sin x\le 1$ nên suy ra $k=0$, khi đó phương trình trở thành $\sin x=0\Leftrightarrow x=\ell\pi\ (\ell\in\mathbb{Z})$.

Vì $x\in[0;2\pi]\Rightarrow x\in\{0;\pi;2\pi\}$ Suy ra tổng các nghiệm $0+\pi+2\pi=3\pi$.

**Chọn D.**

**Câu 28.** Cho phương trình $x^2-(2\cos\alpha-3)x+7\cos^2\alpha-3\cos\alpha-\frac{9}{4}=0$. Gọi $S$ là tập các giá trị của tham số $\alpha$ thuộc đoạn $[0;4\pi]$ để phương trình có nghiệm kép. Tổng các phần tử của tập $S$ bằng

**A.** $\frac{20\pi}{3}$. **B.** $15\pi$. **C.** $16\pi$. **D.** $17\pi$.

***Lời giải***

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \Delta=(2\cos\alpha-3)^2-4\left(7\cos^2\alpha-3\cos\alpha-\frac{9}{4}\right)=0$

$$\Leftrightarrow 6(3-4\cos^2\alpha)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\xrightarrow{\alpha\in[0;4\pi]}\alpha\in\left\{\frac{\pi}{6};\frac{11\pi}{6};\frac{13\pi}{6};\frac{23\pi}{6}\right\}\\ \cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}\xrightarrow{\alpha\in[0;4\pi]}\alpha\in\left\{\frac{5\pi}{6};\frac{7\pi}{6};\frac{17\pi}{6};\frac{19\pi}{6}\right\}\end{array}\right..$$

Vậy $\frac{\pi}{6}+\frac{11\pi}{6}+\frac{13\pi}{6}+\frac{23\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}+\frac{7\pi}{6}+\frac{17\pi}{6}+\frac{19\pi}{6}=16\pi$.

**Chọn C.**

**Câu 29.** Tính tổng $S$ tất cả các nghiệm của phương trình $(2\cos 2x+5)(\sin^4 x-\cos^4 x)+3=0$ trên khoảng $(0;2\pi)$.

**A.** $S=\frac{7\pi}{6}$. **B.** $S=\frac{11\pi}{6}$. **C.** $S=4\pi$. **D.** $S=5\pi$.

***Lời giải***

Phương trình $\Leftrightarrow (2\cos 2x+5)(\sin^2 x-\cos^2 x)+3=0$

$$\Leftrightarrow -(2\cos 2x+5)\cos 2x+3=0$$

$$\Leftrightarrow -2\cos^2 2x-5\cos 2x+3=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2x=\frac{1}{2}\\ \cos 2x=-3\ (\text{loại})\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Vì $x\in(0;2\pi)\Rightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6};\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right\}\Rightarrow S=4\pi$.

**Chọn C.**

**Câu 30.** Tổng các nghiệm của phương trình $\frac{\sqrt{3}-1}{\sin x}+\frac{\sqrt{3}+1}{\cos x}=4\sqrt{2}$ trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

**A.** $\frac{11\pi}{36}$. **B.** $\frac{\pi}{3}$. **C.** $\frac{7\pi}{18}$. **D.** $\pi$.

*Lời giải*

Điều kiện: $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\neq k\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$.

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x=\sqrt{2}\sin 2x$

$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}\sin 2x$

$\Leftrightarrow 2\cos\frac{\pi}{4}.\sin\left(\frac{\pi}{12}+x\right)=\sqrt{2}\sin 2x$ .

$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{12}+x\right)=\sin 2x\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&x=\frac{\pi}{12}+k2\pi\\&x=\frac{11\pi}{36}+\frac{k2\pi}{3}\end{aligned}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

Vì $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{12};\frac{11\pi}{36}\right\}\Rightarrow\frac{\pi}{12}+\frac{11\pi}{36}=\frac{7\pi}{18}$.

**Chọn C.**

**Câu 31.** Tổng các nghiệm của phương trình $\sin x\cos x+|\sin x+\cos x|=1$ trên $(0;2\pi)$ bằng

**A.** $\pi$. **B.** $2\pi$. **C.** $3\pi$. **D.** $4\pi$.

*Lời giải*

Đặt $t=|\sin x+\cos x|\ \left(0\le t\le\sqrt{2}\right)$, suy ra $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$.

Phương trình trở thành: $\frac{t^2-1}{2}+t=1\Leftrightarrow t^2+2t-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&t=1\\&t=-3\ (\text{loại})\end{aligned}\right.$.

Với $t=1$, ta được $|\sin x+\cos x|=1\Leftrightarrow\left|\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|=1\Leftrightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{4}+k2\pi\\&x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{3\pi}{4}+k2\pi\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=k2\pi\\&x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\&x=\pi+k2\pi\\&x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{aligned}\right.(k\in\mathbb{Z})\xrightarrow{x\in(0;2\pi)}x\in\left\{\frac{\pi}{2};\pi;\frac{3\pi}{2}\right\}$.

**Chọn C.**

**Câu 32.** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\sin 3x\left(1-4\sin^2 x\right)=\frac{1}{2}$ trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ bằng

**A.** $\frac{3\pi}{7}$. **B.** $\frac{3\pi}{5}$. **C.** $\frac{37\pi}{70}$. **D.** $\frac{36\pi}{35}$.

*Lời giải*

Nhận thấy $\cos x=0$ không là nghiệm của phương trình.

Nhân hai vế phương trình với $\cos x$ ta được

$$\sin 3x\left(\cos x-4\sin^2 x\cos x\right)=\frac{1}{2}\cos x$$
$$\Leftrightarrow 2\sin 3x\left(4\cos^3 x-3\cos x\right)=\cos x$$
$$\Leftrightarrow 2\sin 3x\cos 3x=\cos x$$
$$\Leftrightarrow \sin 6x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{14}+\frac{k2\pi}{7} \\ x=\frac{\pi}{10}+\frac{k2\pi}{5}\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

- $0\le\frac{\pi}{14}+\frac{k2\pi}{7}\le\frac{\pi}{2}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}\left[\begin{array}{l} k=0\to x=\frac{\pi}{14} \\ k=1\to x=\frac{5\pi}{14}\end{array}\right..$
- $0\le\frac{\pi}{10}+\frac{k2\pi}{5}\le\frac{\pi}{2}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}\left[\begin{array}{l} k=0\to x=\frac{\pi}{10} \\ k=1\to x=\frac{\pi}{2}\end{array}\right..$

Vậy tổng $\frac{\pi}{14}+\frac{5\pi}{14}+\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{2}=\frac{36\pi}{35}$.

**Chọn D.**

**Câu 33.** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\frac{\sin 2x+2\sin^2 x-5\sin x-\cos x+2}{2\cos x+\sqrt{3}}=0$ trên đoạn $\left[0;100\pi\right]$ bằng

**A.** $\frac{7375\pi}{3}$. **B.** $\frac{7475\pi}{3}$. **C.** $\frac{14701\pi}{6}$. **D.** $\frac{14850\pi}{3}$.

*Lời giải*

Điều kiện: $\cos x\ne-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Phương trình tương đương với $\sin 2x+2\sin^2 x-5\sin x-\cos x+2=0$

$$\Leftrightarrow\left(\sin 2x-\cos x\right)+\left(2\sin^2 x-5\sin x+2\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\cos x\left(2\sin x-1\right)+\left(\sin x-2\right)\left(2\sin x-1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\left(2\sin x-1\right)\left(\sin x+\cos x-2\right)=0.$$

- $\sin x+\cos x-2=0$: vô nghiệm.

- $2\sin x-1=0\Leftrightarrow \sin x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \Rightarrow k\in[0;49] \\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\,(\text{loại}) \end{array}\right.$

Vậy tổng các nghiệm cần tính $\sum\limits_{k=0}^{49}\left(\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\right)=50.\dfrac{\pi}{6}+2\pi\sum\limits_{k=0}^{49}k=\dfrac{7375\pi}{3}$.

**Chọn A.**

**Câu 34.** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\sin^3\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin x$ trên đoạn $[0;2018]$ bằng

**A.** $\dfrac{2018\pi}{4}$. **B.** $\dfrac{4036\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{412485\pi}{2}$. **D.** $\dfrac{824967\pi}{4}$.

*Lời giải*

Phương trình $\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^3(\sin x-\cos x)^3=\sqrt{2}\sin x\Leftrightarrow(\sin x-\cos x)^3=4\sin x$.

Nhận thấy $\cos x=0$ không thỏa mãn phương trình.

Chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x$ ta được $(\tan x-1)^3=4\tan x\left(\tan^2 x+1\right)$

$$\Leftrightarrow 3\tan^3 x+3\tan^2 x+\tan x+1\Leftrightarrow \tan x=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Vì $x\in[0;2018]\Rightarrow 0\le -\dfrac{\pi}{4}+k\pi\le 2018\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k\in\{1;2;3;\ldots;642\}$.

Vậy $S=\sum\limits_{k=1}^{642}\left(-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right)=642.\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+\sum\limits_{k=1}^{642}k\pi=\dfrac{412485\pi}{2}$.

**Chọn C.**

**Câu 35.** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\cos^2 x\left(\tan^2 x-\cos 2x\right)=\cos^3 x-\cos^2 x+1$ trên đoạn $[0;43\pi]$ bằng

**A.** $\dfrac{4220}{3}\pi$. **B.** $\dfrac{4225}{3}\pi$. **C.** $\dfrac{4230}{3}\pi$. **D.** $\dfrac{4235}{3}\pi$.

*Lời giải*

Điều kiện $\cos^2 x\ne 0\Leftrightarrow\ x\ne\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Phương trình $\Leftrightarrow \sin^2 x-\cos^2 x\cos 2x=\cos^3 x-\cos^2 x+1$

$\Leftrightarrow 1-\cos^2 x+\cos^2 x\left(1-2\cos^2 x\right)=\cos^3 x-\cos^2 x+1$

$\Leftrightarrow 2\cos^4 x+\cos^3 x-\cos^2 x=0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x+\cos x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=-1\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi+k2\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.

- $0\le\pi+k2\pi\le 43\pi\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}\le k\le 21\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k\in\{0;1;2;...;21\}$

$\Rightarrow$ Tổng các nghiệm là $S_1 = 22\pi + (0+1+2+...+21)2\pi = 484\pi.$

- $0 \le \frac{\pi}{3} + k2\pi \le 43\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \le k \le \frac{64}{3} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k \in \{0;1;2;...;21\}$

  $\Rightarrow$Tổng các nghiệm là $S_2 = 22.\frac{\pi}{3} + (0+1+2+...+21)2\pi = \frac{1408}{3}\pi.$

- $0 \le -\frac{\pi}{3} + k2\pi \le 43\pi \Leftrightarrow \frac{1}{6} \le k \le \frac{65}{3} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k \in \{1;2;...;21\}$

  $\Rightarrow$ Tổng các nghiệm là $S_3 = 21.\left(-\frac{\pi}{3}\right) + (1+2+3+...+21)2\pi = 455\pi.$

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình đã cho trên đoạn $[0;43\pi]$ là

$S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{4225}{3}\pi$.

**Chọn B.**

**Câu 36.** Có bao nhiêu giá trị của tham số $m$ thuộc tập $E = \{-3;-2;-1;0;1;2\}$ để phương trình $2m\sin x\cos x + 4\cos^2 x = m + 5$ có nghiệm?

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

***Lời giải***

Phương trình tương đương với $m\sin 2x + 2\cos 2x = m + 3$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m^2 + 2^2 \ge (m+3)^2 \Leftrightarrow 6m + 5 \le 0 \Leftrightarrow m \le -\frac{5}{6}$.

Mà $m \in E \Rightarrow m \in \{-3;-2;-1\}$.

**Chọn B.**

**Câu 37.** Cho phương trình $m\sin^2 x + 2\sin x\cos x + 3m\cos^2 x = 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực $m$ để phương trình có nghiệm.

**A.** $m \in \left\{0;\frac{4}{3}\right\}$. **B.** $m \in \mathbb{R}\setminus\left\{0;\frac{4}{3}\right\}$. **C.** $m \in \left[0;\frac{4}{3}\right]$. **D.** $m \in \left(0;\frac{4}{3}\right)$.

***Lời giải***

Phương trình $\Leftrightarrow m.\frac{1-\cos 2x}{2} + \sin 2x + 3m.\frac{1+\cos 2x}{2} = 1 \Leftrightarrow \sin 2x + m\cos 2x = 1 - 2m.$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 1 + m^2 \ge 1 - 4m + 4m^2 \Leftrightarrow 3m^2 - 4m \le 0 \Leftrightarrow 0 \le m \le \frac{4}{3}$.

**Chọn C.**

**Câu 38.** Cho phương trình $\frac{5 + 4\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}{\sin x} = \frac{6\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$. Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị thực của $\alpha$ thuộc đoạn $[0;2\pi]$ để phương trình có nghiệm. Tổng các phần tử của tập $S$ bằng

**A.** $\pi$. **B.** $2\pi$. **C.** $4\pi$. **D.** $6\pi$.

***Lời giải***

Điều kiện $\begin{cases}\sin x \neq 0 \\ \cos\alpha \neq 0\end{cases}$. Phương trình tương đương với

$\dfrac{5-4\cos x}{\sin x} = 3\sin 2\alpha \Leftrightarrow 3\sin 2\alpha \sin x + 4\cos x = 5.\ (1)$

Nếu $\sin x = 0 \Rightarrow \cos x = \pm 1$ : không thỏa $(1)$. Do đó phương trình nếu có nghiệm thì luôn thỏa mãn điều kiện $\sin x \neq 0$.

Để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases}\cos\alpha \neq 0 \\ (3\sin 2\alpha)^2 + 16 \geq 25\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos\alpha \neq 0 \\ \sin^2 2\alpha \geq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos\alpha \neq 0 \\ \sin^2 2\alpha = 1\end{cases} \Leftrightarrow \cos 2\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$: thỏa điều kiện.

$\Rightarrow S = \left\{\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{5\pi}{4}; \dfrac{7\pi}{4}\right\} \Rightarrow$ tổng $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{5\pi}{4} + \dfrac{7\pi}{4} = 4\pi.$

**Chọn C.**

**Câu 39.** Cho phương trình $4\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right).\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right) = m^2 + \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x$. Gọi $S = [a;b]$ là tập tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình có nghiệm. Tính $a+b$.

**A.** $a+b=-2.$ **B.** $a+b=-\dfrac{1}{2}.$ **C.** $a+b=0.$ **D.** $a+b=4.$

*Lời giải*

Ta có $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right).\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}\left[\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right) + \sin\dfrac{\pi}{2}\right]$

$= \dfrac{1}{2}\left[\sin 2x\cos\dfrac{\pi}{6} + \sin\dfrac{\pi}{6}\cos 2x + 1\right] = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \dfrac{1}{2}\cos 2x + 1\right].$

Phương trình tương đương với

$$\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x + 2 = m^2 + \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x \Leftrightarrow \cos 2x = \dfrac{m^2-2}{2}.$$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -1 \leq \dfrac{m^2-2}{2} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq m^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$

$\Rightarrow S = [-2;2] \Rightarrow \begin{cases}a=-2 \\ b=2\end{cases} \Rightarrow a+b=0$

**Chọn C.**

**Câu 40.** Cho phương trình $\sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin x\cos x - \dfrac{m}{4} + 2 = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình có nghiệm?

**A.** 7. **B.** 9. **C.** 13. **D.** 15.

*Lời giải*

Ta có $\sin^6 x + \cos^6 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^3 - 3\sin^2 x\cos^2 x\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$

$=1-3\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x.$

Phương trình $\Leftrightarrow 1-\frac{3}{4}\sin^2 2x+3\sin x\cos x-\frac{m}{4}+2=0 \Leftrightarrow 3\sin^2 2x-6\sin 2x=12-m.$

Đặt $t=\sin 2x \xrightarrow{t\in[-1;1]} 3t^2-6t=12-m \Leftrightarrow 3(t-1)^2=15-m.$

Vì $-1\le t\le 1 \Rightarrow 0\le 3(t-1)^2\le 12.$ Do đó để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 0\le 15-m\le 12$

$\Leftrightarrow 3\le m\le 15 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{3;4;5;...;15\}.$

**Chọn C.**

**Câu 41.** Cho phương trình $3\tan^2+\tan x+\cot x+\frac{3}{\sin^2 x}=m.$ Có bao nhiêu giá trị nguyên $m$ nhỏ hơn $2018$ để phương trình có nghiệm?

**A.** 2004. **B.** 2008. **C.** 2011. **D.** 2012.

*Lời giải*

Điều kiện: $\begin{cases}\sin x\ne 0\\ \cos x\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow x\ne \frac{k\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z}).$

Phương trình viết lại $3\left(\tan^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)+\tan x+\cot x=m$

$\Leftrightarrow 3\left(\tan^2 x+\cot^2 x+1\right)+\tan x+\cot x=m.$

Đặt $t=\tan x+\cot x.$ Điều kiện: $|t|\ge 2.$

Phương trình trở thành $3\left(t^2-1\right)+t=m \Leftrightarrow 3t^2+t=m+3.$

Xét hàm $f(t)=3t^2+t$ trên $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty).$

Lập bảng biến thiên suy ra phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m+3\ge 10 \Leftrightarrow m\ge 7$

$\xrightarrow[m<2018]{m\in\mathbb{Z}} m\in\{7;8;9;...;2017\} \Rightarrow$ Có $2011$ giá trị.

**Chọn C.**

**Câu 42.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình $\sin 4x=m.\tan x$ có nghiệm $x\ne k\pi.$

**A.** $m\in\left[-\frac{1}{2};4\right).$ **B.** $m\in\left[-\frac{1}{2};4\right].$ **C.** $m\in\left(-\frac{1}{2};4\right).$ **D.** $m\in(-1;4).$

*Lời giải*

Điều kiện $\cos x\ne 0.$

Phương trình $\Leftrightarrow 2\sin 2x.\cos 2x=\frac{m.\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow 4.\sin x.\cos x.\cos 2x=m.\frac{\sin x}{\cos x}.\ (*)$

Vì $x\ne k\pi$ nên $\sin x\ne 0$. Khi đó $(*) \Leftrightarrow 4\cos^2 x\left(2\cos^2 x-1\right)=m$

Đặt $t=\cos^2 x,$ với $\begin{cases}x\ne k\pi\\ \cos x\ne 0\end{cases}$ suy ra $t\in(0;1)$. Phương trình trở thành $m=8t^2-4t.$

Xét hàm $f(t)=8t^2-4t$ với $t\in(0;1)$, ta được $-\frac{1}{2}\le f(t)<4.$

Do đó phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le m<4.$

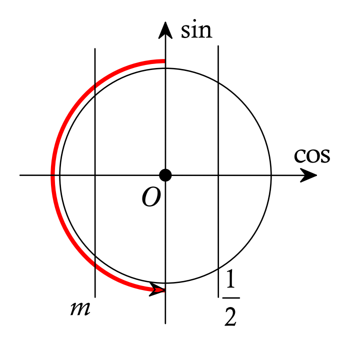
**Chọn A.**

**Câu 43.** Cho phương trình $\cos 2x-(2m+1)\cos x+m+1=0.$ Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right).$

**A.** $-1\le m\le 1$. **B.** $-1\le m\le 0$. **C.** $-1\le m<0$. **D.** $-1<m<0$.

*Lời giải*

Phương trình $\Leftrightarrow 2\cos^2 x-(2m+1)\cos x+m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\frac{1}{2}\\ \cos x=m\end{array}\right.$.




Nhận thấy phương trình $\cos x=\frac{1}{2}$ không có nghiệm trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$ (Hình vẽ).

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \cos x=m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)\Leftrightarrow -1\le m<0$.

**Chọn C.**

**Câu 44.** Cho phương trình $\cos^2 x+2(1-m)\cos x+2m-1=0.$ Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ thuộc đoạn $[-10;10]$ để phương trình có nghiệm?

**A.** 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

*Lời giải*

Đặt $t=\cos x$ $(-1\le t\le 1)$.

Phương trình trở thành $t^2+2(1-m)t+2m-1=0\Leftrightarrow t^2+2t-1=2m(t-1).$ $(1)$

- Xét $t=1$: $(1)$ trở thành $2=0$ (không thỏa mãn).
- Xét $t\ne 1$: $(1)\Leftrightarrow \frac{t^2+2t-1}{t-1}=2m.$

Xét hàm $f(t)=\frac{t^2+2t-1}{t-1}$ với $t\in[-1;1)$, ta có $f'(t)=\frac{t^2+2t-3}{(t-1)^2}<0$ $\forall t\in(-1;1).$

Lập bảng biến thiên ta thấy để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 2m \le 1 \Leftrightarrow m \le \frac{1}{2}$

$\xrightarrow[m\in[-10;10]]{m\in\mathbb{Z}} m \in \{-10;-9;-8;...;0\} \Rightarrow$ Có $11$ giá trị.

**Chọn D.**

**Câu 45.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình $\cos 4x = \cos^2 3x + m\sin^2 x$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\frac{\pi}{12}\right)$.

**A.** $m \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $m \in \left(\frac{1}{2};2\right)$. **C.** $m \in (0;1)$. **D.** $m \in \left(-1;\frac{1}{4}\right)$.

***Lời giải***

Ta có $\cos^2 3x = \frac{1+\cos 6x}{2} = \frac{1+4\cos^3 2x - 3\cos 2x}{2}$ và $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - 1 = \frac{1+4\cos^3 2x-3\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 2x}{2}m$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 2x - 2 = 1 + 4\cos^3 2x - 3\cos 2x + (1-\cos 2x)m$$

$$\Leftrightarrow (\cos 2x - 1)m = 4\cos^3 2x - 4\cos^2 2x - 3\cos 2x + 3. \ (*)$$

Đặt $t = \cos 2x$, với $x \in \left(0;\frac{\pi}{12}\right) \Rightarrow t \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$. Khi đó $(*) \Leftrightarrow m = \frac{4t^3-4t^2-3t+3}{t-1} = 4t^2 - 3$.

Xét hàm $f(t) = 4t^2 - 3$ trên đoạn $\left[\frac{\sqrt{3}}{2};1\right]$, ta được $\begin{cases} \min\limits_{\left[\frac{\sqrt{3}}{2};1\right]} f(t) = 0 \\ \max\limits_{\left[\frac{\sqrt{3}}{2};1\right]} f(t) = 1 \end{cases}$.

Vậy để phương trình $m = f(t)$ có nghiệm khi và chỉ khi $m \in (0;1)$.

**Chọn C.**

**Câu 46.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình $2\sin x + m\cos x = 1 - m$ có nghiệm $x$ thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

**A.** $m \ge -\frac{3}{2}$. **B.** $m > -\frac{3}{2}$. **C.** $-1 \le m \le 3$. **D.** $-1 < m < 3$.

***Lời giải***

Nếu dùng điều kiện có nghiệm: $4 + m^2 \ge (1-m)^2 \Leftrightarrow 4 \ge 1 - 2m \Leftrightarrow m \ge -\frac{3}{2}$ (đáp án A) thì sai hoàn toàn bởi vì $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ thì $\sin x$ quét hết tập giá trị $[-1;1]$ nhưng với $\cos x$ thì không.

Lời giải đúng. Đặt $t = \tan\frac{x}{2}$, với $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [-1;1]$.

Phương trình trở thành $2\frac{2t}{1+t^2}+m\frac{1-t^2}{1+t^2}=1-m \Leftrightarrow t^2-4t+1=2m.$

Xét hàm $f(t)=t^2-4t+1$ trên đoạn $[-1;1]$. Tìm được $\begin{cases}\max\limits_{[-1;1]} f(t)=6\\ \min\limits_{[-1;1]} f(t)=-2\end{cases}.$

Do đó yêu cầu bài toán $-2\le 2m\le 6 \Leftrightarrow -1\le m\le 3.$

**Chọn C.**

**Câu 47.** Cho phương trình $mx^2+4\pi^2=4\pi^2\cos x$. Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

**A.** $-54$. **B.** $-35$. **C.** $35$. **D.** $51$.

***Lời giải***

Vì $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ nên phương trình $\Leftrightarrow m=\frac{4\pi^2(\cos x-1)}{x^2}$.

Xét hàm $f(x)=\frac{\cos x-1}{x^2}$ với $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, ta có $f'(x)=\frac{2(1-\cos x)-x\sin x}{x^3}>0, \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ nên $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)<f(x)<\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<f(x)<-\frac{4}{\pi^2}$

Vậy để phương trình đã cho có nghiệm thì $-2\pi^2<m<-16$
$\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{-19;-18;-17\}$.

**Chọn A.**

**Câu 48.** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $1$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | $+$ | | $0$ | $-$ | $0$ | | $+$ | | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Có bao nhiêu số nguyên $m$ để phương trình $f[3\cos(x+1)+1]=-\frac{m}{2}$ có nghiệm?

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 13.

***Lời giải***

Đặt $t=3\cos(x+1)+1 \Rightarrow -2\le t\le 4.$

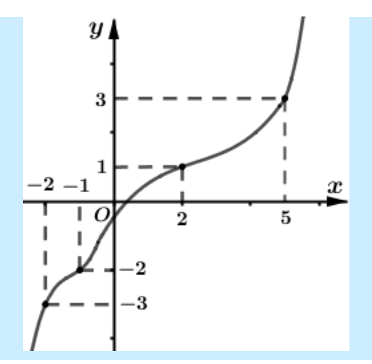
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy với $t\in[-2;4]$ thì $-1\le f(t)\le 3.$

Do đó để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -1\le -\frac{m}{2}\le 3 \Leftrightarrow -6\le m\le 2$

$\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m \in \{-6;-5;-4;...;2\} \Rightarrow$ Có 9 giá trị.

**Chọn C.**

**Câu 49.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa $f(x) > 3$ với mọi $x > 5$ và $f(x) < -3$ với mọi $x < -2$, có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $f(3\sin x + 2) = f(m)$ có nghiệm?




**A.** 6. **B.** 7.

**C.** 8. **D.** 9.

*Lời giải*

Đặt $t = 3\sin x + 2 \Rightarrow -1 \le t \le 5.$

Dựa vào đồ thị ta thấy $f(x)$ đồng biến trên $[-1;5]$ nên

$$f(3\sin x + 2) = f(m) \Leftrightarrow 3\sin x + 2 = m.$$

Mà $3\sin x + 2 \in [-1;5] \Rightarrow m \in [-1;5] \Rightarrow$ có 7 giá trị nguyên.

**Chọn B.**

**Câu 50.** Cho phương trình $2\cos^2 3x + (3-2m)\cos 3x + m - 2 = 0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình có đúng 3 nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right)$.

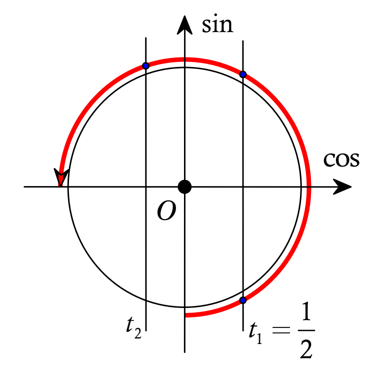
**A.** $-1 \le m \le 1$. **B.** $1 < m \le 2$. **C.** $1 \le m \le 2$. **D.** $1 \le m < 2$.

*Lời giải*

Với $x \in \left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right) \longrightarrow 3x \in \left(-\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

Đặt $t = \cos 3x$ $(-1 \le t \le 1)$. Phương trình trở thành $2t^2 + (3-2m)t + m - 2 = 0$.

Ta có $\Delta = (2m-5)^2 \longrightarrow$ phương trình có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{1}{2} \\ t_2 = m-2 \end{array}\right.$.




Ta thấy ứng với một nghiệm $t_1 = \frac{1}{2}$ thì cho ta hai nghiệm $x$ thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right)$.

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -1 < t_2 \le 0$ (tham khảo hình vẽ)

$$\Leftrightarrow -1 < m-2 \le 0 \Leftrightarrow 1 < m \le 2.$$

**Chọn B.**

***Cách 2.*** Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $2t^2+(3-2m)t+m-2=0$ có hai nghiệm $t_1$, $t_2$ thỏa mãn $-1 < t_2 \le 0 < t_1 < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} P \le 0 \\ a.f(1) > 0 \\ a.f(-1) > 0 \end{cases}$.

**Câu 51.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình $\sin 2x + \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - 2 = m$ có đúng $2$ nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\frac{3\pi}{4}\right)$.

**A.** $-3 < m < -1+\sqrt{2}$. **B.** $-3 < m \le -1+\sqrt{2}$.

**C.** $-1 < m \le -1+\sqrt{2}$. **D.** $-1 < m < -1+\sqrt{2}$.

***Lời giải***

Phương trình viết lại $\sin 2x + \sin x + \cos x - 2 = m$.

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, suy ra $\sin 2x = t^2 - 1$.

Với $x \in \left(0;\frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow x+\frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4};\pi\right) \Rightarrow t \in \left(0;\sqrt{2}\right]$.

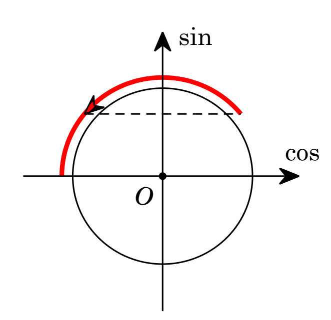
Phương trình trở thành $t^2+t-3=m$. (*)

Xét hàm $f(t)=t^2+t-3$ trên $\left(0;\sqrt{2}\right]$. Ta có $f'(t)=2t+1>0$, $\forall t \in \left(0;\sqrt{2}\right)$.

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\left(0;\sqrt{2}\right]$ và kết luận $f(0) < m \le f\left(\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow -3 < m \le -1+\sqrt{2}$.

Thử lại $m=-1+\sqrt{2} \Rightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Rightarrow$ Có một nghiệm $x=\frac{\pi}{4}$ duy nhất thuộc $\left(0;\frac{3\pi}{4}\right)$.

Lí do dẫn đến sai lầm là bài toán yêu cầu có hai nghiệm khác với yêu cầu có nghiệm.




Dựa vào đường tròn lượng giác (hình vẽ bên) ta thấy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có đúng một nghiệm $t$ thuộc $\left(1;\sqrt{2}\right) \Rightarrow f(1) < m < f\left(\sqrt{2}\right) \Rightarrow -1 < m < -1+\sqrt{2}$.

**Chọn D.**

**Câu 52.** Cho phương trình $m\sin^2 x - 3\sin x\cos x - m - 1 = 0$. Gọi $S$ là tập tất cả các giá trị nguyên $m$ thuộc đoạn $[-5;5]$ để phương trình có đúng $3$ nghiệm thuộc $\left(0;\frac{3\pi}{2}\right)$. Tổng các phần tử của $S$ bằng

**A.** $-15$. **B.** $-14$. **C.** $0$. **D.** $15$.

***Lời giải***

Phương trình $\Leftrightarrow m\left(\sin^2 x - 1\right) - 3\sin x\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow 3\sin x\cos x + m\cos^2 x + 1 = 0$.

Nhận thấy $\cos x = 0$ không thỏa phương trình. Chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$ ta được $\tan^2 x + 3\tan x + m + 1 = 0$.

Đặt $t = \tan x$, ta được phương trình bậc hai $t^2 + 3t + m + 1 = 0$.

Để phương trình đã cho có ba nghiệm thuộc $\left(0;\frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$ phương trình $t^2 + 3t + m + 1 = 0$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow m + 1 < 0 \Leftrightarrow m < -1 \xrightarrow[m\in[-5;5]]{m\in\mathbb{Z}} m = \{-5;-4;-3;-2\} \Rightarrow S = -14$.

**Chọn B.**

**Câu 53.** Cho phương trình $(\cos x + 1)(4\cos 2x - m\cos x) = m\sin^2 x$. Số các giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình có đúng $2$ nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$ là

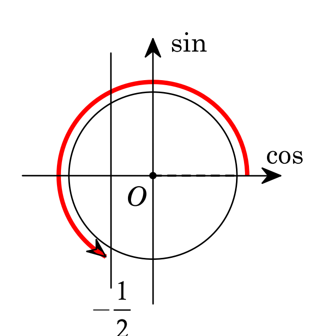
**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

***Lời giải***

Phương trình $\Leftrightarrow (1 + \cos x)(4\cos 2x - m\cos x) = m\left(1 - \cos^2 x\right)$

$$\Leftrightarrow (1+\cos x)(4\cos 2x - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = -1\\ \cos 2x = \frac{m}{4}\end{array}\right.$$

- Với $x \in \left[0;\frac{2\pi}{3}\right] \Rightarrow$ phương trình $\cos x = -1$ vô nghiệm.
- Với $x \in \left[0;\frac{2\pi}{3}\right] \Rightarrow 2x \in \left[0;\frac{4\pi}{3}\right]$. Dựa vào đường tròn lượng giác, ta thấy yêu cầu bài toán $-1 < \frac{m}{4} \le -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -4 < m \le -2$.



Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3;-2\}$.

**Chọn B.**

**Câu 54.** Có bao nhiêu số thực $m$ để phương trình $(\sin x-1)\left(2\cos^2 x-(2m+1)\cos x+m\right)=0$ có đúng $4$ nghiệm thuộc đoạn $[0;2\pi]$?

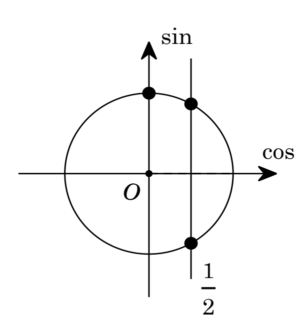
**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

***Lời giải***

Phương trình $\Leftrightarrow (\sin x-1)(2\cos x-1)(\cos x-m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\\ \cos x=m\end{array}\right.$.

- $\sin x=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \ (k\in\mathbb{Z})$, mà $x\in[0;2\pi] \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}$.
- $\cos x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right. \ (k\in\mathbb{Z})$, mà $x\in[0;2\pi] \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{3}, x=\dfrac{5\pi}{3}$.

Do đó yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $\cos x=m$ có đúng một nghiệm $[0;2\pi]$ khác $\left\{\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}.\dfrac{5\pi}{3}\right\}$ (xem hình vẽ).




Từ đường tròn lượng giác ta suy ra chỉ có hai giá trị $m$ thỏa mãn là $m=-1$ và $m=0$. Bởi vì:

- Với $m=-1$, phương rình $\cos x=-1$ chỉ có nghiệm duy nhất $x=\pi$ thuộc $[0;2\pi]$.
- Với $m=0$, phương rình $\cos x=0$ có hai nghiệm $x=\dfrac{\pi}{2}$ (trùng với nghiệm đã tính) và $x=\dfrac{3\pi}{2}$ thuộc $[0;2\pi]$.

Vậy có hai giá trị của $m$ thỏa mãn.

**Chọn B.**

**Câu 55.** Cho phương trình $\sin^4 x+\cos^4 x+\cos^2 4x=m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình có $4$ nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$.

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

*Lời giải*

Ta có $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x.$

Phương trình $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x+\cos^2 4x=m \Leftrightarrow 4\cos^2 4x+\cos 4x=4m-3.$

Đặt $t=\cos 4x,$ với $x\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]\Rightarrow 4x\in[-\pi;\pi]$ nên $t\in[-1;1].$

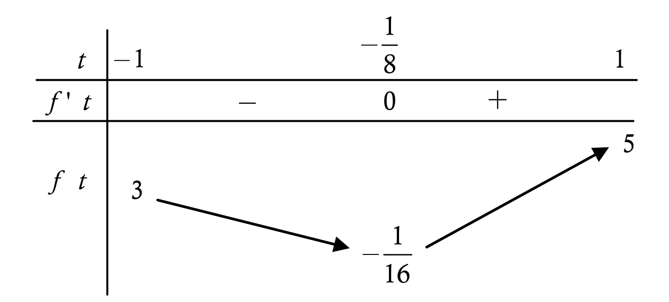
Khi đó phương trình trở thành $4t^2+t=4m-3.\ (*)$

- Ứng với mỗi $t\in[-1;1)$ thì phương trình $\cos 4x=t$ sẽ cho ta hai giá trị của $x\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right].$
- Với $t=1$ thì phương trình $\cos 4x=t$ cho ta đúng một giá trị của $x\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right].$

Do đó yêu cầu bài toán tương đương với $(*)$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $[-1;1).$

Xét hàm $f(t)=4t^2+t$ trên $[-1;1).$ Ta có $f'(t)=8t+1\Rightarrow f'(t)=8t+1\Leftrightarrow t=-\frac{1}{8}.$

Bảng biến thiên




Dựa vào bảng biến thiên ta thấy yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow -\frac{1}{16}<4m-3\le 3\Leftrightarrow \frac{47}{64}<m\le\frac{3}{2}$

$\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m=1.$ Vậy có $1$ giá trị nguyên.

**Chọn A.**

**Câu 56.** Cho phương trình $(\sin x-1)(\cos^2 x-\cos x+m)=0.$ Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình có đúng $5$ nghiệm thuộc đoạn $[0;2\pi].$

**A.** $0 \le m < \frac{1}{4}$. **B.** $-\frac{1}{4} < m \le 0$. **C.** $0 < m < \frac{1}{4}$. **D.** $-\frac{1}{4} < m < 0$.

*Lời giải*

Phương trình tương đương với $\left[\begin{array}{l}\sin x = 1\\ \cos^2 x - \cos x + m = 0. \quad (1)\end{array}\right.$

Đặt $t = \cos x$, với $x \in [0;2\pi] \Rightarrow t \in [-1;1]$. Phương trình $(1)$ trở thành $t^2 - t = -m. \quad (2)$

Phương trình $\sin x = 1$ có đúng $1$ nghiệm $x = \frac{\pi}{2}$ thuộc đoạn $[0;2\pi]$.

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ Phương trình $(1)$ có $4$ nghiệm phân biệt (khác $\frac{\pi}{2}$) thuộc đoạn $[0;2\pi]$ $\Leftrightarrow$ phương trình $(2)$ có $2$ nghiệm phân biệt thuộc $[-1;1]\setminus\{-1;0\}$.

Xét hàm $f(t) = t^2 - t$ trên $(-1;0)\cup(0;1]$. Ta có $f'(t) = 2t - 1 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$.

Lập bảng biến thiên ta thấy yêu cầu của bài toán $-\frac{1}{4} < -m < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} > m > 0$.

**Chọn C.**

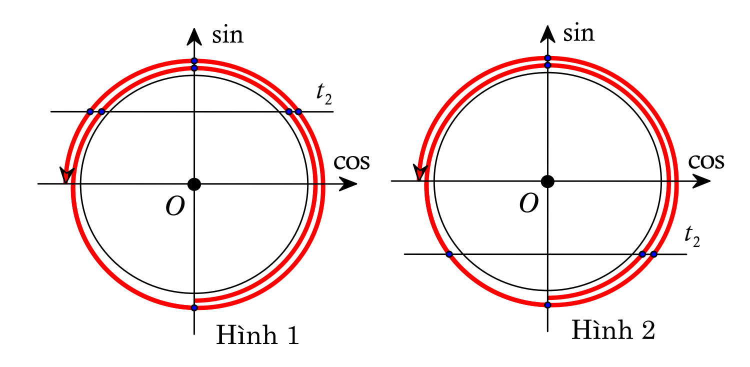
**Câu 57.** Biết rằng khi $m = m_0$ thì phương trình $2\sin^2 x - (5m+1)\sin x + 2m^2 + 2m = 0$ có đúng $5$ nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};3\pi\right)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

**A.** $m_0 = -3$. **B.** $m_0 = \frac{1}{2}$. **C.** $m_0 \in \left(\frac{3}{5};\frac{7}{10}\right]$. **D.** $m_0 \in \left(-\frac{3}{5};-\frac{2}{5}\right)$.

*Lời giải*

Đặt $t = \sin x \ (-1 \le t \le 1)$.

Phương trình trở thành $2t^2 - (5m+1)t + 2m^2 + 2m = 0. \ (*)$




Yêu cầu bài toán tương đương với:

- **Trường hợp 1:** Phương trình $(*)$ có một nghiệm $t_1 = -1$ (cho ra một nghiệm $x$) và một nghiệm $0 < t_2 < 1$ (cho ra bốn nghiệm $x$) (Hình 1).

Do $t_1 = -1 \Rightarrow t_2 = -\frac{c}{a} = -m^2 - m$.

Thay $t_1 = -1$ vào phương trình $(*)$, ta được $\left[\begin{array}{l} m = -3 \Rightarrow t_2 = -6 \notin (0;1)(\text{loại}) \\ m = -\frac{1}{2} \Rightarrow t_2 = \frac{1}{4} \in (0;1)(\text{thỏa}) \end{array}\right.$.

- **Trường hợp 2:** Phương trình $(*)$ có một nghiệm $t_1 = 1$ (cho ra hai nghiệm $x$) và một nghiệm $-1 < t_2 \le 0$ (cho ra ba nghiệm $x$) (Hình 2).

Do $t_1 = 1 \Rightarrow t_2 = \frac{c}{a} = m^2 + m$.

Thay $t_1 = 1$ vào phương trình $(*)$, ta được $\left[\begin{array}{l} m = 1 \Rightarrow t_2 = 2 \notin (-1;0](\text{loại}) \\ m = \frac{1}{2} \Rightarrow t_2 = \frac{3}{4} \notin (-1;0](\text{loại}) \end{array}\right.$.

Vậy $m = -\frac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Do $m = -\frac{1}{2} \in \left(-\frac{3}{5}; -\frac{2}{5}\right)$.

**Chọn D.**

**Câu 58.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ thuộc đoạn $[-10;10]$ để số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình $1 + 2\cos^2 2x - \sqrt{3}\sin 4x - m = m\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ trên đường tròn lượng giác là $4$?

**A.** 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 12.

*Lời giải*

Phương trình $\Leftrightarrow \left(\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x\right)^2 - m = m\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Đặt $t = \sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{t}{2}$ (điều kiện $-2 \le t \le 2$).

Phương trình trở thành: $t^2 - m = m\frac{t}{2} \Leftrightarrow 2t^2 - mt - 2m = 0.$ $(*)$

- Ứng với mỗi $t \in (-2;2)$ thì phương trình $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{t}{2}$ cho ta các nghiệm có số vị trí biểu diễn trên đường tròn lượng giác là $4$.
- Với $t = 2$ thì phương trình $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ cho ta các nghiệm có số vị trí biểu diễn trên đường tròn lượng giác là $2$.
- Với $t = -2$ thì phương trình $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$ cho ta các nghiệm có số vị trí biểu diễn trên đường tròn lượng giác là $2$.

Do đó yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $(*)$ có duy nhất một nghiệm $t$ thuộc khoảng $(-2;2)$ hoặc phương trình $(*)$ có hai nghiệm là $-2$ và $2$.

**Trường hợp 1:** Phương trình $(*)$ có đúng $1$ nghiệm thuộc $(-2;2)$.

Với mọi $t \in (-2;2)$, ta có $(*) \Leftrightarrow m = \frac{2t^2}{t+2} = f(t)$.

Lập bảng biến thiên ta thấy yêu cầu của trường hợp này $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m = 0 \end{array}\right.$.

**Trường hợp 2:** Phương trình $(*)$ nhận $-2$ và $2$ làm nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(-2)^2 - m(-2) - 2m = 0 \\ 2.2^2 - 2m - 2m = 0 \end{cases} : \text{vô lí.}$$

Vậy $\left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m = 0 \end{array}\right. \xrightarrow[m \in [-10;10]]{m \in \mathbb{Z}} m \in \{0;3;4;5;...;10\} \Rightarrow$ có $9$ giá trị.

**Chọn B.**

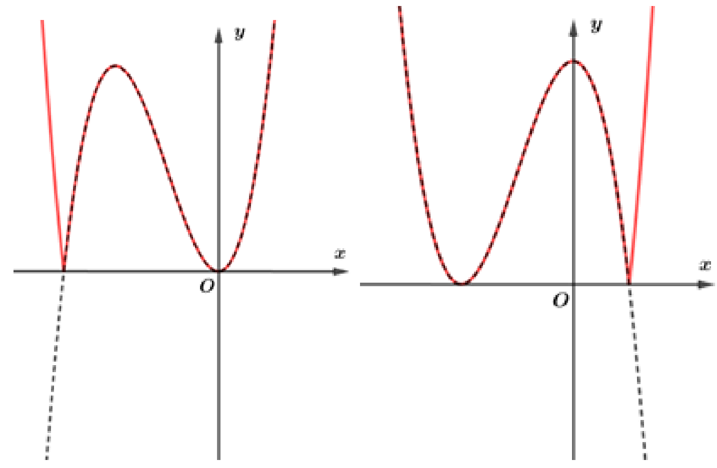
**Câu 59.** Biết phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ với $(a \neq 0)$ có đúng hai nghiệm thực. Hỏi đồ thị hàm số $y = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

**A.** $3$. **B.** $5$. **C.** $2$. **D.** $4$.

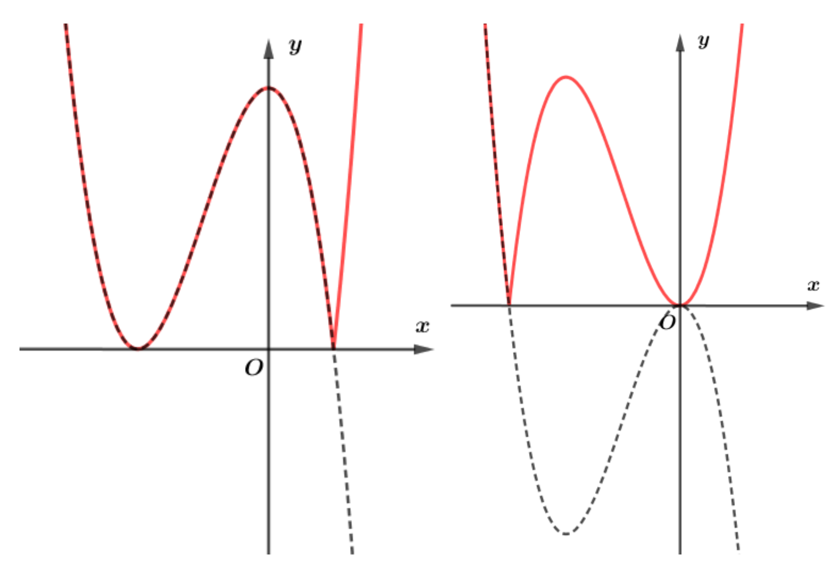
***Lời giải***

Vì phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ với $(a \neq 0)$ có đúng hai nghiệm thực nên đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị trong đó một điểm cực trị nằm trên trục hoành. Các dạng của đồ thị hàm số $y = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ trong trường hợp này được mô tả như sau:

Trường hợp 1: $a > 0$




Trường hợp 2: $a < 0$




Vậy với $a \neq 0$ đồ thị hàm số $y = \left|ax^3 + bx^2 + cx + d\right|$ luôn có ba điểm cực trị.

**Chọn A.**

**Câu 60.** Cho phương trình $(m+1)\cos x + (m-1)\sin x = 2m+3$. Có bao nhiêu giá trị của tham số $m$ để phương trình có hai nghiệm $x_1$, $x_2$ thỏa mãn $\left|x_1 - x_2\right| = \frac{2\pi}{3}$.

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

*Lời giải*

Điều kiện có nghiệm: $(m+1)^2 + (m-1)^2 \geq (2m+3)^2 \Leftrightarrow \frac{-6-\sqrt{22}}{2} \leq m \leq \frac{-6+\sqrt{22}}{2}$.

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{m+1}{\sqrt{2m^2+2}}\cos x + \frac{m-1}{\sqrt{2m^2+2}}\sin x = \frac{2m+3}{\sqrt{2m^2+2}}$

$$\Leftrightarrow \cos(x-\alpha) = \cos\beta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \beta + \alpha + k2\pi \\ x = -\beta + \alpha + \ell 2\pi \end{array}\right. \text{ với } \cos\alpha = \frac{m+1}{\sqrt{2m^2+2}}; \cos\beta = \frac{2m+3}{\sqrt{2m^2+2}}.$$

Yêu cầu bài toán: $\left|x_1 - x_2\right| = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \left|2\beta + (k-\ell)2\pi\right| = \frac{2\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \cos\left|2\beta + (k-\ell)2\pi\right| = \cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \cos 2\beta = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\cos^2\beta - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{2m+3}{\sqrt{2m^2+2}}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{(2m+3)^2}{2m^2+2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \ \text{(thỏa mãn)} \\ m = -\frac{17}{7} \ \text{(thỏa mãn)} \end{array}\right.$$

**Chọn C.**

**Câu 61.** Có bao nhiêu số nguyên $m$ để phương trình:

$$m + \sin(m + \sin 3x) = \sin(3\sin x) + 4\sin^3 x \text{ có nghiệm thực?}$$

**A.** 4. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 9.

*Lời giải*

Cộng thêm $\sin 3x$ vào hai vế phương trình ta được:

$$m + \sin 3x + \sin(m + \sin 3x) = \sin(3\sin x) + 4\sin^3 x + \sin 3x$$

$$\Leftrightarrow (m+\sin 3x)+\sin(m+\sin 3x)=(3\sin x)+\sin(3\sin x).$$

Xét hàm $f(t)=t+\sin t$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=1+\cos t\ge 0,\ \forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến.

Suy ra $m+\sin 3x=3\sin x\Rightarrow m=4\sin^3 x\in[-4;4]$.

**Chọn D.**

**Câu 62.** Cho phương trình $(8\sin^3 x-m)^3=162\sin x+27m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\frac{\pi}{3}\right)$?

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

*Lời giải*

Đặt $u=2\sin x$, vì $x\in\left(0;\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow 2\sin x\in(0;\sqrt{3})$ nên $u\in(0;\sqrt{3})$.

Phương trình trở thành: $(u^3-m)^3=81u+27m$

$\Leftrightarrow (u^3-m)^3+27(u^3-m)=(3u)^3+27.(3u).\ (*)$

Xét hàm $f(t)=t^3+27t$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=3t^2+27>0,\ \forall t\in\mathbb{R}\to$ hàm số $f(t)$ đồng biến.

Nhận thấy $(*)$ có dạng $f(u^3-m)=f(3u)\Leftrightarrow u^3-m=3u\Leftrightarrow u^3-3u=m$.

Xét hàm $g(u)=u^3-3u,\ \forall u\in(0;\sqrt{3})$. Khảo sát ta được $-2\le g(u)<0$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $-2\le m<0$

$\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{-2;-1\}$.

**Chọn B.**

**Câu 63.** Cho phương trình $(1+\cos x)(\cos 4x-m\cos x)=m\sin^2 x$. Tìm tất cả các giá trị của $m$ để phương trình có đúng $3$ nghiệm phân biệt thuộc $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$.

**A.** $m\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$. **B.** $m\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$.

**C.** $m\in(-1;1)$. **D.** $m\in\left[-\frac{1}{2};1\right)$.

*Lời giải*

Ta có:

$$(1+\cos x)(\cos 4x-m\cos x)=m\sin^2 x\Leftrightarrow (1+\cos x)(\cos 4x-m\cos x)-m(1-\cos^2 x)=0$$

$$\Leftrightarrow (1+\cos x)[\cos 4x-m\cos x-m(1-\cos x)]=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-1\\ \cos 4x=m\end{array}\right..$$

- Xét phương trình $\cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Phương trình $\cos x=-1$ không có nghiệm trong đoạn $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$.

***Cách 1.***

- Xét phương trình $\cos 4x = m$. Đặt $f(x) = \cos 4x$. Ta có: $f'(x) = -4\sin 4x$.

Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin 4x = 0 \Leftrightarrow 4x = k\pi \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{4}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Xét trong đoạn $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$ thì ta có: $x \in \left\{0;\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right\}$.

Lập bảng biến thiên, ta thấy phương trình $\cos 4x = m$ có đúng $3$ nghiệm phân biệt trong đoạn $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$ khi và chỉ khi $-\frac{1}{2} \le m < 1$.

**Cách 2.**

- Xét $\cos 4x = m$. Ta có $x \in \left[0;\frac{2\pi}{3}\right] \Leftrightarrow 4x \in \left[0;\frac{8\pi}{3}\right]$.

Với $4x \in [0;2\pi]\setminus\{\pi\}$ và $m \in (-1;1]$ phương trình $\cos 4x = m$ có $2$ nghiệm.

Với $4x \in \left(2\pi;\frac{8\pi}{3}\right]$ và $m \in \left[-\frac{1}{2};1\right)$ phương trình $\cos 4x = m$ có $1$ nghiệm.

Vậy phương trình có $3$ nghiệm phân biệt thuộc $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$ khi $m \in \left[-\frac{1}{2};1\right)$.

**Chọn D.**

**Câu 64.** Khẳng định nào sau đây là đúng về phương trình sau:

$$\sin\left(\frac{x}{x^2+6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{80}{x^2+32x+332}\right) = 0\ ?$$

**A.** Số nghiệm của phương trình là $8$.

**B.** Tổng các nghiệm của phương trình là $8$.

**C.** Tổng các nghiệm của phương trình là $48$.

**D.** Phương trình có vô số nghiệm thuộc $\mathbb{R}$.

***Lời giải***

Phương trình đã cho tương đương với $\sin\left(\frac{x}{x^2+6}\right) = \sin\left(\frac{80}{x^2+32x+332}\right) (*)$.

Ta biết rằng hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Ta chỉ ra rằng các hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2+6}$ và $g(x) = \frac{80}{x^2+32x+332}$ nhận giá trị trong khoảng này.

Thật vậy, ta có $\left|\frac{x}{x^2+6}\right| \le \left|\frac{x}{2\sqrt{6x^2}}\right| = \frac{1}{2\sqrt{6}}$ và $0 < \frac{80}{x^2+32x+332} = \frac{80}{(x+16)^2+76} \le \frac{80}{76} < \frac{\pi}{2}$.

Từ các đánh giá trên, $(*)$ xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{x}{x^2+6} = \frac{80}{x^2+32x+332} \Leftrightarrow x^3 - 48x^2 + 332x - 480 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 6 \\ x = 40 \end{array}\right..$$

Tổng các nghiệm của phương trình đã cho là $2+6+40=48$.

**Chọn C.**

**Câu 65.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để phương trình $\sqrt{\sin x+2}+\sqrt[3]{m-\sin x}=2$ có nghiệm.

**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $1$. **D.** $0$.

*Lời giải*

Ta có $\sqrt{\sin x+2}+\sqrt[3]{m-\sin x}=2$. Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{\sin x+2} \\ v=\sqrt[3]{m-\sin x} \end{cases}$ $\left(1\le u\le\sqrt{3}\right)$.

Khi đó $\begin{cases} u^2=\sin x+2 \\ v^3=m-\sin x \end{cases} \Rightarrow u^2+v^3=m+2$ (*).

Ta lại có $u+v=2\Rightarrow v=2-u$. $(*)$ trở thành

$$u^2+(u-2)^3=m+2\ (1)\Leftrightarrow m=u^3-5u^2+12u-10=f(u),\ \left(1\le u\le\sqrt{3}\right).$$

Trên $\mathbb{R}$, ta có $f'(u)=-3u^2+14u-12$, $f'(u)=0\Leftrightarrow u=\dfrac{7-\sqrt{13}}{3}\in\left[1;\sqrt{3}\right]$

Để phương trình đã cho có nghiệm thì $(1)$ có nghiệm $1\le u\le\sqrt{3}$

Hay $f\left(\dfrac{7-\sqrt{13}}{3}\right)\le m\le f\left(\sqrt{3}\right)\Rightarrow m\in\{0;1\}$) Vì $m$ nguyên.

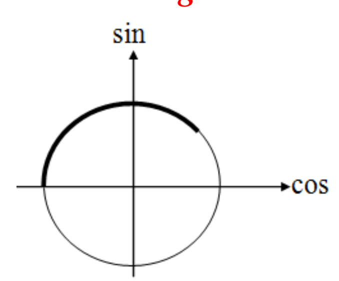
Vậy có $2$ giá trị nguyên của $m$ thỏa đề bài.

**Chọn A.**

**Câu 66.** Số giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $\sin 2x+\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-2=m$ có đúng một nghiệm thực thuộc khoảng $\left(0;\dfrac{3\pi}{4}\right)$?

**A.** $3$. **B.** $2$. **C.** $0$. **D.** $1$.

*Lời giải*




Ta có $x\in\left(0;\dfrac{3\pi}{4}\right)\Rightarrow\dfrac{\pi}{4}<x+\dfrac{\pi}{4}<\pi\Rightarrow 0<\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\le 1\Rightarrow 0<\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}$.

Mặt khác $\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin x+\cos x$.

Đặt $\sin x+\cos x=t$ với $t\in\left(0;\sqrt{2}\right]\Rightarrow\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x.\cos x=t^2\Rightarrow\sin 2x=t^2-1$.

Phương trình đã cho trở thành $t^2-1+t-2=m \Leftrightarrow t^2+t-3=m\ (*)$.

Xét $f(t)=t^2+t-3$ với $t\in\left(0;\sqrt{2}\right]$. Ta có $f'(t)=2t+1$. Do đó $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{2}$ (loại).

Lập bảng biến thiên ta có phương trình $(*)$ có nhiều nhất một nghiệm $t$. Do đó để phương trình đã cho có đúng một nghiệm thực $x$ thuộc khoảng $\left(0;\frac{3\pi}{4}\right)$ thì $\left[\begin{array}{l} t=\sqrt{2} \\ 0<t\le 1 \end{array}\right.$.

Với $t=\sqrt{2}$ thay vào phương trình $(*)$: $2+\sqrt{2}-3=m \Leftrightarrow m=\sqrt{2}-1\notin\mathbb{Z}$.

Với $0<t\le 1$ lập bảng biến thiên $-3<m\le -1 \Rightarrow$ có 2 giá trị nguyên của $m$ là $-2$ và $-1$.

**Chọn B.**

**Câu 67.** Cho hàm số $y=x^3-3x^2$ có đồ thị $(C)$ và điểm $M(m;-4)$. Hỏi có bao nhiêu số nguyên $m$ thuộc đoạn $[-10;10]$ sao cho qua điểm $M$ có thể kẻ được ba tiếp tuyến đến $(C)$.

**A.** 20. **B.** 15. **C.** 17. **D.** 12.

*Lời giải*

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Đạo hàm: $y'=3x^2-6x$.

Ta nhận thấy các đường thẳng $x=a$ với $a\in\mathbb{R}$ không phải là tiếp tuyến của $(C)$ và một đường thẳng không thể tiếp xúc với đồ thị hàm số bậc ba tại hai điểm phân biệt.

Giả sử phương trình đường thẳng đi qua $M(m;-4)$ là $d: y=k(x-m)-4$ với $k\in\mathbb{R}$ là hệ số góc của đường thẳng.

Qua $M$ có thể kẻ được ba tiếp tuyến đến $(C)$ khi và chỉ khi hệ phương trình $\begin{cases} k=3x^2-6x \\ k(x-m)-4=x^3-3x^2 \end{cases}$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (3x^2-6x)(x-m)=x^3-3x^2$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow 2x^3-3(m+1)x^2+6mx=0$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow x\left[2x^2-3(m+1)x+6m\right]=0$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow 2x^2-3(m+1)x+6m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=9(m+1)^2-48m>0 \\ m\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2-30m+9>0 \\ m\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<\frac{1}{3} \\ m>3 \end{array}\right. \\ m\ne 0 \end{cases}.$$

Với điều kiện trên và với $\begin{cases} m\in[-10;10] \\ m\in\mathbb{Z} \end{cases}$ ta có $m\in\{-10;-9;...;-1;4;5;...;10\}$.

Vậy có 17 số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Chọn C.**

**Câu 68.** Cho phương trình $3\sqrt{\tan x+1}\left(\sin x+2\cos x\right)=m\left(\sin x+3\cos x\right)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên tham số $m$ thuộc đoạn $\left[-2018;2018\right]$ để phương trình trên có nghiệm duy nhất $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$?

**A.** 2018. **B.** 2015. **C.** 4036. **D.** 2016.

*Lời giải*

Với $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ thì $\cos x>0$, chia hai vế cho $\cos x$, ta được:

$$3\sqrt{\tan x+1}\left(\sin x+2\cos x\right)=m\left(\sin x+3\cos x\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{\tan x+1}\left(\tan x+2\right)=m\left(\tan x+3\right)\Leftrightarrow\frac{3\sqrt{\tan x+1}\left(\tan x+2\right)}{\tan x+3}=m.(1)$$

Đặt $t=\sqrt{\tan x+1}$, $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow t\in\left(0;+\infty\right)$. Khi đó $(1)\Leftrightarrow g\left(t\right)=\frac{3t\left(t^2+1\right)}{t^2+2}=m$ $(2)$

Xét hàm $g\left(t\right)=\frac{3t\left(t^2+1\right)}{t^2+2}$ trên $\left(0;+\infty\right)$. $g'\left(t\right)=\frac{3t^4+15t^2+6}{\left(t^2+2\right)^2}>0,\forall t>0$.

Suy ra để thỏa yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m>g\left(0\right)=0$

Mà $\begin{cases}m\in\mathbb{Z}\\ m\in\left[-2018;2018\right]\end{cases}$. Suy ra $m\in\left\{1;2;3;...;2018\right\}$.

**Chọn A.**

**Câu 69.** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của $m$ để hàm số $y=x+5+\frac{1-m}{x-2}$ đồng biến trên $\left[5;+\infty\right)$?

**A.** 10. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 11.

*Lời giải*

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{2\right\}$. Đạo hàm: $y'=1+\frac{m-1}{\left(x-2\right)^2}=\frac{x^2-4x+m+3}{\left(x-2\right)^2}$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=x^2-4x+3$ trên $\left[5;+\infty\right)$.

Đạo hàm: $f'\left(x\right)=2x-4$. Xét $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=2\Rightarrow y=-1$. Ta có: $f\left(5\right)=8$.

Do $\left(x-2\right)^2>0$ với mọi $x\in\left[5;+\infty\right)$ nên $y'\geq 0$, $\forall x\in\left[5;+\infty\right)$ khi và chỉ khi $f\left(x\right)\geq -m$, $\forall x\in\left[5;+\infty\right)$. Lập bảng biến thiên ta có $-m\leq 8\Leftrightarrow m\geq -8$.

Mà $m$ nguyên âm nên ta có: $m\in\left\{-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1\right\}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên âm của $m$ để hàm số $y=x+5+\frac{1-m}{x-2}$ đồng biến trên $\left[5;+\infty\right)$.

**Chọn B.**

**Câu 70.** Có bao nhiêu giá trị nguyên $m$ để phương trình $\left(8\sin^3 x - m\right)^3 = 162\sin x + 27m$ có nghiệm thỏa mãn $0 < x < \frac{\pi}{3}$?

**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** Vô số. **D.** $1$.

*Lời giải*

Đặt $t = 2\sin x$, với $0 < x < \frac{\pi}{3}$ thì $t \in \left(0;\sqrt{3}\right)$.

Phương trình đã cho trở thành $\left(t^3 - m\right)^3 = 81t + 27m$.

Đặt $u = t^3 - m \Rightarrow t^3 = u + m$.

Khi đó ta được $\begin{cases} u^3 = 27(3t+m) \\ (3t)^3 = 27(u+m) \end{cases} \Rightarrow u^3 - (3t)^3 = 27(3t-u) \Leftrightarrow u^3 + 27u = (3t)^3 + 27.3t \quad (*)$

Xét hàm số $f(v) = v^3 + 27v$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có nên hàm số đồng biến.

Do đó $(*) \Leftrightarrow u = 3t \Rightarrow t^3 - 3t = m \quad (1)$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t$ trên khoảng $\left(0;\sqrt{3}\right)$ có $f'(t) = 3t^2 - 3$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ (vì $t > 0$).

Lập bảng biến thiên ta thấy phương trình $(1)$ có nghiệm khi.

Vậy có hai giá trị nguyên của $m$ thỏa yêu cầu bài toán.

**Chọn A.**

**Câu 71.** Số nghiệm thuộc đoạn $[0;2017]$ của phương trình $\frac{\sqrt{1+\cos x} + \sqrt{1-\cos x}}{\sin x} = 4\cos x$ là

**A.** 1283. **B.** 1285. **C.** 1284. **D.** 1287.

*Lời giải*

Điều kiện $\sin x \neq 0$; $\sin x.\cos x \geq 0$

$$\frac{\sqrt{1+\cos x} + \sqrt{1-\cos x}}{\sin x} = 4\cos x \Leftrightarrow \sqrt{1+\cos x} + \sqrt{1-\cos x} = 4\sin x\cos x$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{(1+\cos x)(1-\cos x)} = 16\sin^2 x\cos^2 x \Leftrightarrow 1 + |\sin x| = 8\sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right)(1)$$

Trường hợp 1: $\sin x \geq 0$

$$(1) \Leftrightarrow (1+\sin x)\left(8\sin^3 x - 8\sin^2 x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4} \end{array}\right. \overset{\sin x \geq 0}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \end{array}\right.$$

- $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$ vì $\sin x.\cos x \geq 0$ nên $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$.

- $\sin x = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right) + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right) + k2\pi \end{array}\right.$

  Vì $\sin x.\cos x \ge 0$ nên $x = \arcsin\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right) + k2\pi$.

Trường hợp 2: $\sin x < 0$

$$(1) \Leftrightarrow (1-\sin x)\left(-8\sin^3 x - 8\sin^2 x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4} \end{array}\right. \overset{\sin x<0}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \sin x = -\frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \end{array}\right.$$

$\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$ vì $\sin x.\cos x \ge 0$ nên $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$.

$\sin x = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right) + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right) + k2\pi \end{array}\right.$

Vì $\sin x.\cos x \ge 0$ nên $x = \pi - \arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right) + k2\pi$.

Xét nghiệm thuộc đoạn $[0;2017]$

- Với $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \Rightarrow 0 \le \frac{\pi}{6} + k2\pi \le 2017 \Leftrightarrow 0 \le k \le 320$ có $321$ nghiệm.
- Với $x = \arcsin\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right) + k2\pi = \frac{3\pi}{10} + k2\pi \Rightarrow 0 \le \frac{3\pi}{10} + k2\pi \le 2017 \Leftrightarrow 0 \le k \le 320$ có $321$ nghiệm.
- Với $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \Rightarrow 0 \le \frac{7\pi}{6} + k2\pi \le 2017 \Leftrightarrow 0 \le k \le 320$ có $321$ nghiệm.
- Với $x = \pi - \arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right) + k2\pi = \frac{13\pi}{10} + k2\pi \Rightarrow 0 \le \frac{13\pi}{10} + k2\pi \le 2017 \Leftrightarrow 0 \le k \le 320$ có $321$ nghiệm.

Vậy có tổng cộng $321.4 = 1284$ nghiệm thỏa yêu cầu bài toán.

**Chọn C.**

**Câu 72.** Gọi $M$, $m$ lần lượt là giá lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^{2018}x+\cos^{2018}x$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó:

**A.** $M=2$, $m=\dfrac{1}{2^{1008}}$ 　 **B.** $M=1, m=\dfrac{1}{2^{1009}}$

**C.** $M=1, m=0$ 　 **D.** $M=1, m=\dfrac{1}{2^{1008}}$

*Lời giải*

Ta có: $y=\sin^{2018}x+\cos^{2018}x=\left(\sin^2 x\right)^{1009}+\left(1-\sin^2 x\right)^{1009}$.

Đặt $t=\sin^2 x$, $0\le t\le 1$ thì hàm số đã cho trở thành $y=t^{1009}+(1-t)^{1009}$.

Xét hàm số $f(t)=t^{1009}+(1-t)^{1009}$ trên đoạn $[0;1]$.

Ta có: $f'(t)=1009.t^{1008}-1009.(1-t)^{1008}$;

$f'(t)=0\Leftrightarrow 1009t^{1008}-1009(1-t)^{1008}=0\Leftrightarrow\left(\dfrac{1-t}{t}\right)^{1008}=1\Leftrightarrow\dfrac{1-t}{t}=1\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$

Mà $f(1)=f(0)=1$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2^{1008}}$.

Suy ra $\max\limits_{[0;1]}f(t)=f(0)=f(1)=1$, $\min\limits_{[0;1]}f(t)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2^{1008}}$

Vậy $M=1$, $m=\dfrac{1}{2^{1008}}$.

**Chọn D.**

**Câu 73.** Cho các số thực dương $x$, $y$, $z$ thỏa mãn $x+y+xyz=z$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{2x}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}+\dfrac{x^2\left(1+\sqrt{yz}\right)^2}{(y+z)\left(x^2+1\right)}$ thuộc khoảng nào trong các khoảng sau:

**A.** $(1,3;1,4)$. 　 **B.** $(0,8;0,9)$. 　 **C.** $(1,7;1,8)$. 　 **D.** $(1,4;1,5)$.

*Lời giải*

Từ giả thiết $x+y+xyz=z\Leftrightarrow x.\dfrac{1}{z}+y.\dfrac{1}{z}+xy=1$.

Đặt $x=\tan\dfrac{A}{2}$, $y=\tan\dfrac{B}{2}$ và $\dfrac{1}{z}=\tan\dfrac{C}{2}$ thay vào hệ thức trên ta được

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$$

Suy ra $A$, $B$, $C$ là ba góc của tam giác.

Từ đó ta có $\dfrac{2x}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}=2\sin\dfrac{A}{2}\cos^2\dfrac{A}{2}$ và $\dfrac{x^2}{\left(x^2+1\right)}=\sin^2\dfrac{A}{2}$.

$$\frac{(1+\sqrt{yz})^2}{(y+z)}=\frac{\left(\sqrt{\tan\frac{C}{2}}+\sqrt{\tan\frac{B}{2}}\right)^2}{\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+1}=\frac{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}+2\sqrt{\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}\right)}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\left(\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+1\right)}$$

$$=\frac{\sin\frac{B+C}{2}+\sqrt{\sin B\sin C}}{\cos\frac{B-C}{2}}=\frac{\cos\frac{A}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}\left[\cos(B-C)-\cos(B+C)\right]}}{\cos\frac{B-C}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{A}{2}+\sqrt{\cos^2\frac{B-C}{2}-1+\cos^2\frac{A}{2}}}{\cos\frac{B-C}{2}}\le\frac{\cos\frac{A}{2}+\sqrt{1-1+\cos^2\frac{A}{2}}}{1}=2\cos\frac{A}{2}.$$

Vậy $P\le 2\sin\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}+2\sin^2\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\sin A\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)=\sqrt{2}\sin A.\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}$.

Dấu bằng đạt được khi $\begin{cases}B=C\\ \sin A=1\\ \sin\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\frac{\pi}{2}\\ B=C=\frac{\pi}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=\sqrt{2}-1\\ z=\sqrt{2}+1\end{cases}$.

**Chọn D.**

**Câu 74.** Số các giá trị nguyên của $m$ để phương trình $\cos^2 x+\sqrt{\cos x+m}=m$ có nghiệm là:

**A.** $4$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** $5$.

***Lời giải***

Ta có: $\cos^2 x+\sqrt{\cos x+m}=m$ suy ra $m\ge 0$.

Đặt $\sqrt{\cos x+m}=t$, $t\ge 0$. Phương trình trở thành: $\begin{cases}\cos^2 x+t=m\\ t^2-\cos x=m\end{cases}$

$$\Rightarrow(\cos^2 x-t^2)+(t+\cos x)=0\Leftrightarrow(\cos x+t)(\cos x-t+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=-t\\ \cos x-t+1=0\end{array}\right..$$

- Trường hợp $1$: $\cos x=-t\Rightarrow\sqrt{\cos x+m}=-\cos x\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x\le 0\\ \cos^2 x-\cos x=m\end{cases}$.

Đặt $u=\cos x\ (-1\le u\le 0)$.

Xét $f(u)=u^2-u$, ta có $f'(u)=2u-1$; $f'(u)=0\Leftrightarrow u=\frac{1}{2}$.

Do đó với $-1\le u\le 0$ suy ra $f'(u)<0$ với mọi $u\in[-1;0]$.

Suy ra $f(-1)\ge f(u)\ge f(0)\Rightarrow 2\ge f(u)\ge 0$.

Để phương trình có nghiệm thì $m\in[0;2]$. Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{0;1;2\}$.

- Trường hợp $2$: $\cos x-t+1=0\Leftrightarrow\sqrt{\cos x+m}=1+\cos x\Leftrightarrow\cos^2 x+\cos x+1=m$.

Đặt $v=\cos x$, $-1\le v\le 1$. Ta có $m=v^2+v+1=g(v)$, $g'(v)=2v+1=0\Leftrightarrow v=-\frac{1}{2}$.

Lập bảng biến thiên ta thấy để phương trình có nghiệm thì $m\in\left[\frac{3}{4};3\right]$. Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{1;2;3\}$. Vậy có tất cả 4 số nguyên $m$ thỏa mãn bài toán.

**Chọn A.**

**Câu 75.** Số nghiệm của phương trình: $\sin^{2015}x-\cos^{2016}x=2\left(\sin^{2017}x-\cos^{2018}x\right)+\cos 2x$ trên $[-10;30]$ là:

**A.** $46$. **B.** $51$. **C.** $50$. **D.** $44$.

***Lời giải***

Ta có: $\sin^{2015}x-\cos^{2016}x=2\left(\sin^{2017}x-\cos^{2018}x\right)+\cos 2x$

$$\Leftrightarrow \sin^{2015}x\left(1-2\sin^2x\right)+\cos^{2016}x\left(2\cos^2x-1\right)=\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin^{2015}x.\cos 2x+\cos^{2016}x.\cos 2x=\cos 2x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \sin^{2015}x+\cos^{2016}x=1\end{array}\right..$$

Với $\cos 2x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$

Vì $x\in[-10;30]\Rightarrow -10\le\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\le 30\Leftrightarrow -\frac{20}{\pi}-\frac{1}{2}\le k\le\frac{60}{\pi}-\frac{1}{2}\Rightarrow -6\le k\le 18$.

Với $\sin^{2015}x+\cos^{2016}x=1$. Ta có $\sin^{2015}x\le\sin^2x;\cos^{2016}x\le\cos^2x$.

Do đó $1=\sin^{2015}x+\cos^{2016}x\le\sin^2x+\cos^2x=1$ suy ra $\left[\begin{array}{l}\sin x=0,\cos x=\pm 1\\ \sin x=1,\cos x=0\end{array}\right.$.

Nếu $\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Vì $x\in[-10;30]\Rightarrow -10\le k\pi\le 30\Leftrightarrow\frac{-10}{\pi}\le\pi\le\frac{30}{\pi}\Rightarrow -3\le k\le 9$.

Nếu $\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Vì $x\in[-10;30]\Rightarrow -10\le\frac{\pi}{2}+k2\pi\le 30\Leftrightarrow -\frac{5}{\pi}-\frac{1}{4}\le k\le\frac{15}{\pi}-\frac{1}{4}\Rightarrow -1\le k\le 4$.

Vậy số nghiệm của phương trình đã cho là: $13+6+25=44$.

**Chọn D.**

**Câu 76.** Tổng các nghiệm của phương trình $2\cos 3x(2\cos 2x+1)=1$ trên đoạn $[-4\pi;6\pi]$ là:

**A.** $61\pi$. **B.** $72\pi$. **C.** $50\pi$. **D.** $56\pi$.

***Lời giải***

Xét $\sin x=0\Leftrightarrow x=m\pi$: Thay vào phương trình thấy không thỏa mãn

Xét $\sin x\ne 0\Leftrightarrow x\ne m\pi$

$$2\cos 3x(2\cos 2x+1)=1\Leftrightarrow 2[\cos 5x+\cos x]+2\cos 3x=1$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\cos 5x+2\sin x\cos 3x+2\sin x\cos x=\sin x$$

$$\Leftrightarrow (\sin 6x - \sin 4x) + (\sin 4x - \sin 2x) + \sin 2x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin 6x = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k2\pi}{5} \\ x = \dfrac{\pi}{7} + \dfrac{l2\pi}{7} \end{array}\right. \\ x \neq m\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

Trước tiên ta cần chỉ ra giữa hai họ nghiệm $x = \frac{k2\pi}{5}$ và $x = \frac{\pi}{7} + \frac{l2\pi}{7}$ không có giá trị trùng nhau. Thật vậy giả sử $\frac{\pi}{7} + \frac{l2\pi}{7} = \frac{k2\pi}{5}$ $(k, l \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow 14k = 5 + 10l$ Vô lí vì $14k$ là số nguyên chẵn và $5 + 10l$ là số nguyên lẻ.

Với $\begin{cases} x = \dfrac{k2\pi}{5} \\ x \neq m\pi \\ x \in [-4\pi; 6\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \in \{-10; -9; -8; ...14; 15\} \\ k \notin \{-10; -5; 0; 5, 10, 15\} \end{cases}$

$\Rightarrow$Các giá trị $x$ cần loại bỏ là $-4\pi,\ -2\pi,\ 0,\ 2\pi,\ 4\pi,\ 6\pi$.Tổng các giá trị này là $6\pi$

Với $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{7} + \dfrac{l2\pi}{7} \\ x \neq m\pi \\ x \in [-4\pi; 6\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l \in \{-14; -13; -12; ...19; 20\} \\ l \notin \{-4; -11; 3; 10; 17\} \end{cases}$

$\Rightarrow$Các giá trị $x$ cần loại bỏ là $-\pi,\ -3\pi,\ \pi,\ 3\pi,\ 5\pi$. Tổng các giá trị này là $5\pi$

Vậy tổng nghiệm $S = \left[\sum_{k=-10}^{15}\left(\frac{k2\pi}{5}\right) - (6\pi)\right] + \left[\sum_{l=-14}^{20}\left(\frac{\pi}{7} + \frac{l2\pi}{7}\right) - 5\pi\right] = 50\pi$.

**Chọn C.**

**Câu 77.** Cho phương trình $\sqrt[3]{(\sin x + m)^2} + \sqrt[3]{\sin^2 x - m^2} = 2\sqrt[3]{(\sin x - m)^2}$. Gọi $S = [a; b]$ là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình trên có nghiệm thực. Tính giá trị của $P = a^2 + b^2$.

**A.** $P = \dfrac{162}{49}$. **B.** $P = \dfrac{49}{162}$. **C.** $P = 4$. **D.** $P = 2$.

*Lời giải*

Trường hợp 1: $\sin x = m$ thì ta có $\sqrt[3]{(2m)^2} = 0 \Leftrightarrow m = 0$. Khi đó phương trình có nghiệm $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Trường hợp 2: $\sin x \neq m$ thì phương trình đã cho tương đương

$$\sqrt[3]{\left(\frac{\sin x + m}{\sin x - m}\right)^2} + \sqrt[3]{\frac{\sin x + m}{\sin x - m}} - 2 = 0.$$

Giải ra ta được $\left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{\dfrac{\sin x+m}{\sin x-m}}=1\\ \sqrt[3]{\dfrac{\sin x+m}{\sin x-m}}=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{\sin x+m}{\sin x-m}=1\\ \dfrac{\sin x+m}{\sin x-m}=-8\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\ 9\sin x=7m\end{array}\right.$.

Do đó để phương trình có nghiệm thực thì $\begin{cases}\dfrac{7m}{9}\neq m\\ -\dfrac{9}{7}\le m\le\dfrac{9}{7}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ -\dfrac{9}{7}\le m\le\dfrac{9}{7}\end{cases}$

Kết luận: Hợp hai trường hợp suy ra tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số $m$ cần tìm là $S=\left[\dfrac{-7}{9};\dfrac{7}{9}\right]\Rightarrow P=a^2+b^2=\left(\dfrac{-9}{7}\right)^2+\left(\dfrac{9}{7}\right)^2=\dfrac{162}{49}$.

**Chọn A.**

**Câu 78.** Để phương trình $\dfrac{a^2}{1-\tan^2 x}=\dfrac{\sin^2 x+a^2-2}{\cos 2x}$ có nghiệm, tham số $a$ phải thỏa mãn điều kiện:

**A.** $a\neq\pm\sqrt{3}$.　**B.** $\begin{cases}|a|>1\\ |a|\neq\sqrt{3}\end{cases}$.　**C.** $|a|\ge 4$.　**D.** $|a|\ge 1$.

*Lời giải*

ĐKXĐ: $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \cos 2x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin^2 x\neq 1\\ \sin^2 x\neq\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Ta có $\dfrac{a^2}{1-\tan^2 x}=\dfrac{\sin^2 x+a^2-2}{\cos 2x}\Leftrightarrow a^2\cos^2 x=\sin^2 x+a^2-2$

$\Leftrightarrow -a^2\sin^2 x=\sin^2 x-2\Leftrightarrow\sin^2 x=\dfrac{2}{1+a^2}$

Để phương trình đã cho có nghiệm điều kiện là

$$\begin{cases}\dfrac{2}{1+a^2}\in[0;1]\\ \dfrac{2}{1+a^2}\neq 1\\ \dfrac{2}{1+a^2}\neq\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2}{1+a^2}\in(0;1)\\ \dfrac{2}{1+a^2}\neq\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+a^2>2\\ 1+a^2\neq 4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|a|>1\\ |a|\neq\sqrt{3}\end{cases}.$$

**Chọn B.**

**Câu 79.** Số giờ có ánh sáng của một thành phố X ở vĩ độ $40°$ bắc trong ngày thứ $t$ của một năm không nhuận được cho bởi hàm số: $d(t)=3\sin\left[\dfrac{\pi}{182}(t-80)\right]+12$, $t\in\mathbb{Z}$ và $0<t\le 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố X có nhiều giờ ánh sáng nhất?

**A.** $262$.　**B.** $353$.　**C.** $80$.　**D.** $171$.

*Lời giải*

Ta có: $d(t)=3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right]+12\le 3+12=15$

Dấu bằng xảy ra khi $\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right]=1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80)=\frac{\pi}{2}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow t=171+364k$.

Mặt khác $t\in(0;365]$ nên $0<171+364k\le 365 \Leftrightarrow -\frac{171}{364}<k\le\frac{194}{364}$.

Mà $k\in\mathbb{Z}$ nên $k=0$.

Vậy $t=171$.

**Chọn D.**

**Câu 80.** Cho phương trình $4\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=a^2+\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x$ $(1)$. Gọi $n$ là số giá trị nguyên của tham số $a$ để phương trình $(1)$ có nghiệm. Tính $n$.

**A.** $n=5$. **B.** $n=3$. **C.** $n=2$. **D.** $n=1$.

***Lời giải***

Ta có $(1)\Leftrightarrow 2\left(\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1\right)=a^2+\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x$

$\Leftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1=\frac{a^2}{2}+\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow \cos 2x=\frac{a^2}{2}-1$.

Phương trình $(1)$ có nghiệm $\Leftrightarrow \left|\frac{a^2}{2}-1\right|\le 1\Leftrightarrow -2\le a\le 2$, Do $a\in\mathbb{Z}$ nên $a=0;a=\pm1;a=\pm2$

Vậy $n=5$.

**Chọn A.**

**Câu 81.** Tổng tất cả các giá trị của tham số thực $m$ sao cho đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^3$ có điểm cực đại và cực tiểu đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất là

**A.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $0$. **D.** $\frac{1}{4}$.

***Lời giải***

Ta có: $y'=3x^2-6mx$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2m\end{array}\right.$.

Để hàm số có cực đại cực tiểu thì $m\ne 0$.

Khi đó các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0;4m^3)$, $B(2m;0)$.

Ta có $I(m;2m^3)$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB$.

Đường phân giác của góc phần tư thứ nhất là $d:x-y=0$.

Do đó để điểm cực đại và cực tiểu đối xứng với nhau qua $d$ thì:

$$\begin{cases} 2m-4m^3=0 \\ m-2m^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow 1-2m^2=0 \Leftrightarrow m=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy tổng tất cả các giá trị của tham số thực $m$ là $0$.

**Chọn C.**

**Câu 82.** Tìm $m$ để phương trình $\sqrt{1-\sin x}+\sqrt{\sin x+\frac{1}{2}}=m$ có nghiệm.

**A.** $\frac{1}{2}\le m\le\frac{\sqrt{6}}{2}$.

**B.** $0\le m\le 1$.

**C.** $0\le m\le\sqrt{3}$.

**D.** $\frac{\sqrt{6}}{2}\le m\le\sqrt{3}$.

*Lời giải*

Đặt $t=\sin x$ $\left(\frac{-1}{2}\le t\le 1\right)$, phương trình trở thành $\sqrt{1-t}+\sqrt{t+\frac{1}{2}}=m$

Nhận xét phương trình ban đầu có nghiệm $x$ khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có nghiệm $t\in\left[-\frac{1}{2};\right]$. Xét hàm $f(t)=\sqrt{1-t}+\sqrt{t+\frac{1}{2}}$, với $t\in\left[-\frac{1}{2};1\right]$.

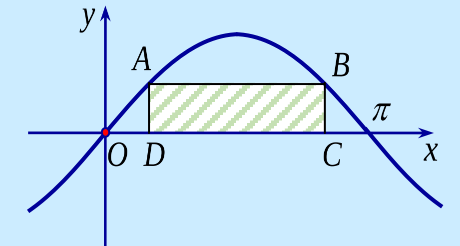
Ta có: $f'(t)=-\frac{1}{2\sqrt{1-t}}+\frac{1}{2\sqrt{t+\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{1-t}-\sqrt{t+\frac{1}{2}}}{2\sqrt{1-t}\sqrt{t+\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{1}{2}-2t}{2\sqrt{1-t}\sqrt{t+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1-t}+\sqrt{t+\frac{1}{2}}\right)}$

Ta có $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{4}$.

Lập bảng biến thiên ta thấy phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow\frac{\sqrt{6}}{2}\le m\le\sqrt{3}$.

**Chọn D.**

**Câu 83.** Cho hai điểm $A$, $B$ thuộc đồ thị hàm số $y=\sin x$ trên đoạn $[0;\pi]$. Các điểm $C$, $D$ thuộc trục $Ox$ thỏa mãn $ABCD$ là hình chữ nhật và $CD=\frac{2\pi}{3}$. Độ dài cạnh $BC$ bằng




**A.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**B.** $1$.

**C.** $\frac{1}{2}$.

**D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

*Lời giải*

Gọi $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$. Ta có: $\begin{cases} x_B - x_A = \dfrac{2\pi}{3} \\ y_B = y_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = x_A + \dfrac{2\pi}{3} \ (1) \\ \sin x_B = \sin x_A \ (2) \end{cases}$

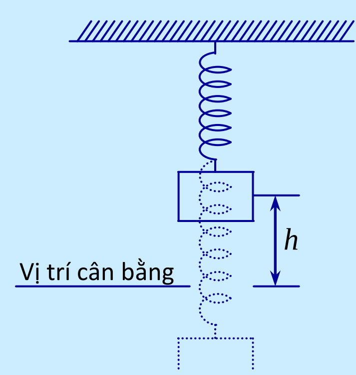
Thay $(1)$ vào $(2)$, ta được:

$$\sin\left(x_A + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin x_A \Leftrightarrow x_A + \frac{2\pi}{3} = \pi - x_A + k2\pi \Leftrightarrow x_A = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Do $x \in [0;\pi]$ nên $x_A = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow BC = AD = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$.

**Chọn C.**

**Câu 84.** Một vật nặng treo bởi một chiếc lò xo, chuyển động lên xuống qua vị trí cân bằng (hình vẽ). Khoảng cách $h$ từ vật đến vị trí cân bằng ở thời điểm $t$ giây được tính theo công thức $h = |d|$ trong đó $d = 5\sin 6t - 4\cos 6t$ với $d$ được tính bằng centimet.




Ta quy ước rằng $d > 0$ khi vật ở trên vị trí cân bằng, $d < 0$ khi vật ở dưới vị trí cân bằng. Hỏi trong giây đầu tiên, có bao nhiêu thời điểm vật ở xa vị trí cân bằng nhất?

**A.** $0$. **B.** $4$. **C.** $1$. **D.** $2$.

***Lời giải***

Ta có $h = |d| = |5\sin 6t - 4\cos 6t| = \sqrt{41}\left|\sin(6t+\alpha)\right| \le \sqrt{41}$, với $\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{5}{\sqrt{41}} \\ \sin\alpha = \dfrac{4}{\sqrt{41}} \end{cases}$.

Do đó vật ở xa vị trí cân bằng nhất $h_{max} = \sqrt{41}$ khi $\left|\sin(6t+\alpha)\right| = 1 \Leftrightarrow \cos(6t+\alpha) = 0$

$$\Leftrightarrow 6t + \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow t = -\frac{\alpha}{6} + \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{6}.$$

Trong giây đầu tiên, $0 \le t \le 1 \Leftrightarrow 0 \le -\dfrac{\alpha}{6} + \dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{6} \le 1 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\pi} - \dfrac{1}{2} \le k \le \dfrac{6}{\pi} + \dfrac{\alpha}{\pi} - \dfrac{1}{2} \Rightarrow k \in \{0;1\}$.

Vậy có $2$ lần vật ở xa vị trí cân bằng nhất.

**Chọn D.**

**Câu 85.** Phương trình $\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{1}{2}$ có bao nhiêu nghiệm?

**A.** Vô số nghiệm. **B.** Vô nghiệm. **C.** $3$ nghiệm. **D.** $2$ nghiệm

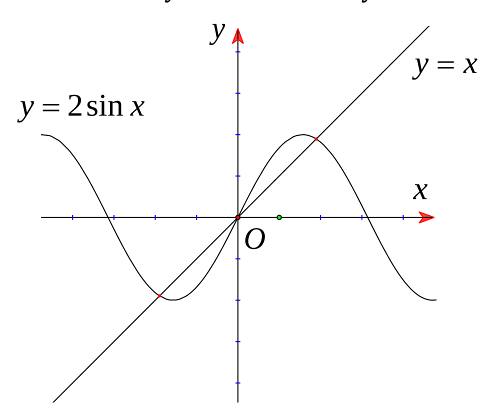
***Lời giải***

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Phương trình tương đương với $2\sin x=x$ $(1)$.

Số nghiệm của phương trình $(1)$ là số giao điểm của đồ thị hai hàm số $y=2\sin x$ và $y=x$.

Trên hệ trục Oxy vẽ đồ thị các hàm số $y=2\sin x$ và $y=x$




Từ đồ thị ta thấy, đồ thị hai hàm số chỉ cắt nhau tại ba điểm trong đó có một điểm có hoành độ $x=0$ không thỏa mãn phương trình. Do vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt.

**Chọn D.**

**Câu 86.** Hàm số $f(x)=\sin\frac{x}{4}+\tan\frac{x}{6}$ có chu kỳ tuần hoàn nhỏ nhất là bao nhiêu? Biết rằng số $T>0$ được gọi là chu kỳ tuần hoàn của $f(x)$ nếu như $f(x)=f(x+T),\forall x\in\mathbb{R}$

**A.** $10\pi$ **B.** $24\pi$ **C.** $8\pi$ **D.** $14\pi$

*Lời giải*

Ta biết rằng chu kỳ của $\sin\alpha x$ là $\frac{2\pi}{\alpha}$, còn chu kỳ của $\tan\alpha x$ là $\frac{\pi}{\beta}$ với $\alpha,\beta>0$. Do đó, chu kỳ của $\sin\frac{x}{4},\tan\frac{x}{6}$ lần lượt là $8\pi,6\pi$. Gọi T là chu kỳ cần tìm thì ta cần có $\frac{T}{8\pi},\frac{T}{6\pi}$ là các số nguyên dương. Do đó giá trị nhỏ nhất cần tìm là $T=24\pi$.

**Chọn B.**

**Câu 87.** Cho phương trình $\sqrt[3]{m+3\sqrt[3]{m+3\sin x}}=\sin x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình có nghiệm?

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

*Lời giải*

Phương trình $\Leftrightarrow m+3\sqrt[3]{m+3\sin x}=\sin^3 x$

$\Leftrightarrow m+3\sin x+3\sqrt[3]{m+3\sin x}=\sin^3 x+3\sin x$.

Xét hàm $f(t)=t^3+3t$, $\forall t\in\mathbb{R}$. Hàm này đồng biến nên suy ra

$$f\left(\sqrt[3]{m+3\sin x}\right)=f(\sin x)\Leftrightarrow\sqrt[3]{m+3\sin x}=\sin x\Leftrightarrow m=\sin^3 x-3\sin x.$$

Đặt $u=\sin x$ $(-1\le u\le 1)$, phương trình trở thành $m=u^3-3u$.

Xét hàm $g(u)=u^3-3u$, $\forall u\in[-1;1]$. Ta tìm được $\begin{cases}\max\limits_{[-1;1]} g(u)=2\\ \min\limits_{[-1;1]} g(u)=-2\end{cases}$.

Do đó, để phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow \min\limits_{[-1;1]} g(u)\le m\le \max\limits_{[-1;1]} g(u)\Leftrightarrow -2\le m\le 2$

$\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{-2;-1;0;1;2\}$.

**Chọn C.**

**Câu 88.** Tập tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình $m+\sqrt{m+1+\sqrt{1+\sin x}}=\sin x$ có nghiệm là $[a;b]$. Giá trị của $a+b$ bằng

**A.** 4. **B.** $\frac{1}{2}-\sqrt{2}$. **C.** 3. **D.** $-\frac{1}{4}-\sqrt{2}$.

***Lời giải***

Phương trình $\Leftrightarrow\left(m+1+\sqrt{1+\sin x}\right)+\sqrt{m+1+\sqrt{1+\sin x}}=(1+\sin x)+\sqrt{1+\sin x}$.

Xét hàm số $f(t)=t^2+t$ với $t\in[0;+\infty)$. Hàm này đồng biến trên $[0;+\infty)$ nên suy ra

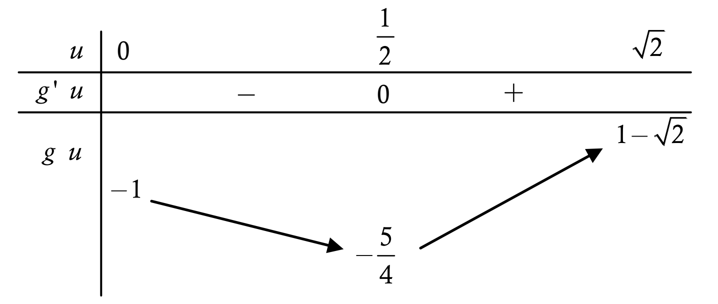
$$f\left(\sqrt{m+1+\sqrt{1+\sin x}}\right)=f\left(\sqrt{1+\sin x}\right)$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{m+1+\sqrt{1+\sin x}}=\sqrt{1+\sin x}$$
$$\Leftrightarrow m+1+\sqrt{1+\sin x}=1+\sin x$$
$$\Leftrightarrow m=\sin x-\sqrt{1+\sin x}$$

Đặt $u=\sqrt{1+\sin x}$, vì $\sin x\in[-1;1]\Rightarrow u\in\left[0;\sqrt{2}\right]$

Phương trình trở thành: $m=u^2-u-1$.

Xét hàm $g(u)=u^2-u-1$ với $u\in\left[0;\sqrt{2}\right]$. Ta có $g'(u)=2u-1$; $g'(u)=0\Leftrightarrow u=\frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên




Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình có nghiệm

$$\Leftrightarrow -\frac{5}{4}\le m\le 1-\sqrt{2}\ \Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{5}{4}\\ b=1-\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow a+b=-\frac{1}{4}-\sqrt{2}.$$

**Chọn D.**

**Câu 89.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình

$$\sin x(2-\cos 2x)-2(2\cos^3 x+m+1)\sqrt{2\cos^3 x+m+2}=3\sqrt{2\cos^3 x+m+2}$$

có đúng một nghiệm thuộc $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right)$?

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

*Lời giải*

Phương trình tương đương với

$$2\sin^3 x+\sin x=2(2\cos^3 x+m+2)\sqrt{2\cos^3 x+m+2}+\sqrt{2\cos^3 x+m+2}.$$

Xét hàm $f(t)=2t^3+t$ với $t\geq 0$. Ta có $f'(t)=6t^2+1>0\longrightarrow f(t)$ đồng biến.

Mà $f(\sin x)=f\left(\sqrt{2\cos^3 x+m+2}\right)$, suy ra

$$\sin x=\sqrt{2\cos^3 x+m+2}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x\geq 0\\ \sin^2 x=2\cos^3 x+m+2\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \sin^2 x=2\cos^3 x+m+2$ (vì $\sin x\geq 0,\ \forall x\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right)$)

$\Leftrightarrow 1-\cos^2 x=2\cos^3 x+m+2\Leftrightarrow m=-2\cos^3 x-\cos^2 x-1.$

Đặt $u=\cos x$, vì $x\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right)\Rightarrow u\in\left(-\frac{1}{2};1\right]$. Khi đó phương trình trở thành

$m=-2u^3-u^2-1.$

Xét $g(u)=-2u^3-u^2-1$, có $g'(u)=-6u^2-2u$; $g'(u)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=0\in\left(-\frac{1}{2};1\right]\\ u=-\frac{1}{3}\in\left(-\frac{1}{2};1\right]\end{array}\right.$.

Lập bảng biến thiên suy ra phương trình có nghiệm khi $\left[\begin{array}{l}m=-1\\ -4\leq m<-\frac{28}{27}\end{array}\right.$

$\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{-4;-3;-2;-1\}.$

**Chọn D.**

**Câu 90.** Cho phương trình $\sin 2x-\cos 2x+|\sin x+\cos x|-\sqrt{2\cos^2 x+m}-m=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình có nghiệm ?

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 9.

*Lời giải*

Điều kiện: $2\cos^2 x+m\geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$1+\sin 2x+|\sin x+\cos x|=1+\cos 2x+m+\sqrt{2\cos^2 x+m}$$

$$\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)^2+|\sin x+\cos x|=2\cos^2 x+m+\sqrt{2\cos^2 x+m}$$

$$\Leftrightarrow \left(|\sin x+\cos x|\right)^2+|\sin x+\cos x|=\left(\sqrt{2\cos^2 x+m}\right)^2+\sqrt{2\cos^2 x+m}$$

Xét hàm $f(t)=t^2+t$ với $t\ge 0$. Ta có $f'(t)=2t+1>0,\ \forall t\ge 0 \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến.

Mà $f(|\sin x+\cos x|)=f\left(\sqrt{2\cos^2+m}\right)$, suy ra $|\sin x+\cos x|=\sqrt{\cos^2 x+m}$

$$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)^2=2\cos^2 x+m \Leftrightarrow 1+\sin 2x=2\cos^2 x+m \Leftrightarrow \sin 2x-\cos 2x=m.$$

Vì $\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

$\Rightarrow$ Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow -\sqrt{2}\le m\le\sqrt{2}\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{-1;0;1\}$.

**Chọn B.**

**Câu 91.** Cho phương trình $\sqrt[3]{4\sin x+m}+\sin x=\sqrt[3]{\sin^3 x+4\sin x+m-8}+2$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình có nghiệm ?

**A.** 18. **B.** 19. **C.** 20. **D.** 21.

***Lời giải***

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt[3]{4\sin x+m} \\ b=\sin x \end{cases}$. Phương trình trở thành: $a+b=\sqrt[3]{a^3+b^3-8}+2$

$$\Leftrightarrow (a+b-2)^3=a^3+b^3-8$$
$$\Leftrightarrow (a+b)^3-6(a+b)^2+12(a+b)-(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)=0$$
$$\Leftrightarrow (a+b)(3ab-6a-6b+12)=0$$
$$\Leftrightarrow 3(a+b)(a-2)(b-2)=0.$$

- Với $b=2\Rightarrow \sin x=2$ vô nghiệm.
- Với $a=2\Rightarrow \sqrt[3]{4\sin x+m}=2\Leftrightarrow \sin x=\dfrac{8-m}{4}$

Phương trình có nghiệm khi $-1\le\dfrac{8-m}{4}\le 1\Leftrightarrow 4\le m\le 12\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{4;5;6;...;12\}$.

- Với $a+b=0\longrightarrow \sqrt[3]{4\sin x+m}+\sin x=0\Leftrightarrow m=-\sin^3 x-4\sin x$.

Đặt $t=\sin x\ (-1\le t\le 1)$, ta được $m=-t^3-4t$.

Xét hàm $f(t)=-t^3-4t$ trên đoạn $[-1;1]$, ta được $-5\le f(t)\le 5$ với mọi $t\in[-1;1]$.

Suy ra phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -5\le m\le 5\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{-5;-4;...;4;5\}$.

Hợp hai trường hợp ta được $18$ giá trị nguyên của $m$ (vì $m=4$, $m=5$ lặp lại).

**Chọn A.**

**Câu 92.** Cho phương trình $3\sqrt{\tan x+1}(\sin x+2\cos x)=m(\sin x+3\cos x)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ thộc đoạn $[-2018;2018]$ để phương trình trên có đúng một nghiệm thuộc $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$?

**A.** 2015. **B.** 2016. **C.** 2018. **D.** 4036.

*Lời giải*

Điều kiện: $\cos x\neq 0$.

Vì $\cos x\neq 0$ nên phương trình tương đương với $\Leftrightarrow 3(\tan x+2)\sqrt{\tan x+1}=m(\tan x+3)$.

Đặt $t=\sqrt{\tan x+1}$, vì $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow t\in(1;+\infty)$.

Khi đó phương trình trở thành $3t(t^2+1)=m(t^2+2)\Leftrightarrow m=\frac{3t^3+3t}{t^2+2}$.

Xét hàm $f(t)=\frac{3t^3+3t}{t^2+2}$ với $t\in(1;+\infty)$. Ta có $f'(t)=\frac{3(t^4+5t^2+2)}{(t^2+2)^2}>0,\ \forall t\in(1;+\infty)$.

Lập bảng biến thiên suy ra phương trình có nghiệm khi $m>2$

$\xrightarrow[m\in\mathbb{Z}]{m\in[-2018;2018]} m\in\{3,4,\ldots,2018\}\Rightarrow$ Có 2016 giá trị.

**Chọn B.**

**Câu 93.** Số các giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $\cos^2 x+\sqrt{\cos x+m}=m$ có nghiệm là

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

*Lời giải*

Đặt $u=\sqrt{\cos x+m}$, ta có hệ $\begin{cases}\cos^2 x+u=m\\ u^2-\cos x=m\end{cases}$.

Trừ vế theo vế ta được:

$$\cos^2 x-u^2+u+\cos x=0\Leftrightarrow(u+\cos x)(\cos x-u+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=-\cos x\\ u=\cos x+1\end{array}\right.$$

- $u=\cos x+1$, ta được $\sqrt{m+\cos x}=\cos x+1$

$$(1)\Leftrightarrow m+\cos x=(\cos x+1)^2\Leftrightarrow m=\cos^2 x+\cos x+1\Rightarrow m\in\left[\frac{3}{4};3\right]$$

- $u=-\cos x$, ta được $\sqrt{m+\cos x}=-\cos x\Leftrightarrow\begin{cases}-\cos x\geq 0\\ m+\cos x=\cos^2 x\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x\leq 0\\ m=\cos^2 x-\cos x\Rightarrow m\in[0;2]\end{cases}$$

Vậy $m\in\{0;1;2;3\}\Rightarrow$ Có 4 số nguyên dương thỏa mãn.

**Chọn C.**

**Câu 94.** Số các giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $\sqrt{1+2\cos x}+\sqrt{1+2\sin x}=\frac{m}{3}$ có nghiệm là

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

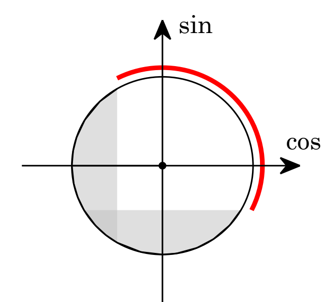
*Lời giải*

Điều kiện: $\begin{cases}1+2\cos x\ge 0\\1+2\sin x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{\pi}{6}+k2\pi\le x\le\frac{2\pi}{3}+k2\pi$. (Hình vẽ)

Phương trình $\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge 0\\2+2(\sin x+\cos x)+2\sqrt{1+2(\sin x+\cos x)+4\sin x\cos x}=\frac{m^2}{9}\end{cases}$.

Đặt $t=\sin x+\cos x\Rightarrow t\in\left[\frac{-1+\sqrt{3}}{2};\sqrt{2}\right]$

Phương trình $(1)$ trở thành $2+2t+2\sqrt{2t^2+2t-1}=\frac{m^2}{9}$.




Xét hàm $f(t)=2+2t+2\sqrt{2t^2+2t-1}$ với $t\in\left[\frac{-1+\sqrt{3}}{2};\sqrt{2}\right]$.

Ta có $f'(t)=2+\frac{4t+2}{\sqrt{2t^2+2t-1}}>0,\ \forall t\in\left[\frac{-1+\sqrt{3}}{2};\sqrt{2}\right]$.

Suy ra $\begin{cases}\max f(t)=f\left(\sqrt{2}\right)=4\sqrt{2}+4\\\min f(t)=f\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)=1+\sqrt{3}\end{cases}$.

Do đó để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{3}+1\le\frac{m^2}{9}\le 4\left(\sqrt{2}+1\right)\\m\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 3\sqrt{\sqrt{3}+1}\le m\le 6\sqrt{\sqrt{2}+1}$

$\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{5;6;7;8;9\}$.

**Chọn D.**

**Câu 95.** Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{3}|\sin x|\right)$ lần lượt là

**A.** $-1$ và $1$. **B.** $0$ và $1$. **C.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ và $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $0$ và $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

***Lời giải***

Vì $0\le|\sin x|\le 1\Rightarrow 0\le\frac{\pi}{3}|\sin x|\le\frac{\pi}{3}$.

Trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ hàm số $\sin$ luôn tăng nên suy ra $\sin 0\le\sin\left(\frac{\pi}{3}|\sin x|\right)\le\sin\frac{\pi}{3}$

hay $0\le\sin\left(\frac{\pi}{3}|\sin x|\right)\le\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**Chọn D.**

**Câu 96.** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=2\cos^3 x-\cos 2x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$ lần lượt là

**A.** $-3$ và $1$. **B.** $\frac{1}{4}$ và $1$. **C.** $\frac{19}{27}$ và $1$. **D.** $-3$ và $\frac{3}{4}$.

***Lời giải***

Ta có $f(x)=2\cos^3 x-\cos 2x=2\cos^3 x-2\cos^2 x+1$.

Đặt $t=\cos x$, vì $x\in\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]\Rightarrow t\in\left[\frac{1}{2};1\right]$

Khi đó hàm số trở thành $f(t)=2t^3-2t^2+1$ với $t\in\left[\frac{1}{2};1\right]$.

Khảo sát hàm số $f(t)$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2};1\right]$, ta tìm được $\begin{cases}\min f(x)=\frac{19}{27}\\ \max f(x)=1\end{cases}$.

**Chọn C.**

**Câu 97.** Gọi $m, M$ lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y=(3-5\sin x)^{2018}$. Giá trị của $M+m$ bằng

**A.** $2^{2018}\left(1+2^{4036}\right)$. **B.** $2^{2018}$. **C.** $2^{4036}$. **D.** $2^{6054}$.

***Lời giải***

Ta có $-1\le\sin x\le 1\Rightarrow 5\ge -5\sin x\ge -5$

hay $-5\le -5\sin x\le 5\Rightarrow -2\le 3-5\sin x\le 8\Rightarrow 0\le(3-5\sin x)^{2018}\le 8^{2018}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $M=2^{6054}$, giá trị nhỏ nhất của hàm số là $m=0$.

**Chọn D.**

**Câu 98.** Gọi $M, m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^2 x-4\sin x+5$. Tính $P=M-2m^2$.

**A.** $P=1$. **B.** $P=7$. **C.** $P=8$. **D.** $P=2$.

***Lời giải***

Ta có $y=\sin^2 x-4\sin x+5=(\sin x-2)^2+1$.

Do $-1\le \sin x\le 1\Rightarrow -3\le \sin x-2\le -1\Rightarrow 1\le (\sin x-2)^2\le 9$

$$\Rightarrow 2\le (\sin x-2)^2+1\le 10\Rightarrow \begin{cases} M=10\\ m=2\end{cases}\Rightarrow P=M-2m^2=2.$$

**Chọn D.**

**Câu 99.** Giá trị nhỏ nhất của $f(x)=\sin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)+\cos\left(\frac{4x}{x^2+1}\right)+1$ gần nhất với số nào sau đây?

**A.** $-1$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $-\frac{1}{4}$. **D.** $-\frac{1}{8}$.

***Lời giải***

Ta có $\cos\left(\frac{4x}{x^2+1}\right)=\cos 2\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)=1-2\sin^2\frac{2x}{x^2+1}$.

Do đó $f(x)=-2\sin^2\frac{2x}{x^2+1}+\sin\frac{2x}{x^2+1}+2$.

Đặt $t=\sin\frac{2x}{x^2+1}\in[-1;1]$, ta được $f(t)=-2t^2+t+2$.

Xét hàm $f(t)=-2t^2+t+2$ trên đoạn $[-1;1]$, ta được $\min\limits_{[-1;1]} f(t)=-1$.

Lời giải trên có vẻ hợp lý nhưng xét kỹ thì không ổn vì $-1\le\frac{2x}{x^2+1}\le 1$ (xét hàm).

Khi đó $t=\sin\frac{2x}{x^2+1}\in[-\sin 1;\sin 1]$.

Tương tự như trên, xét hàm $f(t)=-2t^2+t+2$ trên đoạn $[-\sin 1;\sin 1]$, ta được $\min\limits_{[-\sin 1;\sin 1]} f(t)=f(-\sin 1)=-2(-\sin 1)^2+(-\sin 1)+2\approx 0,25$.

**Chọn C.**

***Nhận xét.*** Bài toán chỉ hay khi tự luận, nếu trắc nghiệm thì dùng MODE 7 rất nhanh.

**Câu 100.** Gọi $m, M$ lần lượt là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y=\frac{\cos x+2\sin x+3}{2\cos x-\sin x+4}$. Tính $S=11m+M$.

**A.** $S=-10$. **B.** $S=4$. **C.** $S=6$. **D.** $S=24$.

***Lời giải***

Gọi $y_0$ là một giá trị của hàm số.

Khi đó phương trình $y_0=\dfrac{\cos x+2\sin x+3}{2\cos x-\sin x+4}$ có nghiệm.

Ta có $y_0=\dfrac{\cos x+2\sin x+3}{2\cos x-\sin x+4}\Leftrightarrow(2y_0-1)\cos x-(y_0+2)\sin x=3-4y_0$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow(2y_0-1)^2+(y_0+2)^2\ge(3-4y_0)^2$

$$\Leftrightarrow 11y_0^2-24y_0+4\le 0\Leftrightarrow\frac{2}{11}\le y_0\le 2\Rightarrow\begin{cases}M=2\\ m=\dfrac{2}{11}\end{cases}\Rightarrow P=4.$$

**Chọn B.**

**Câu 101.** Gọi $M,\ m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{\sin x+\cos x+1}{\sqrt{2+\sin 2x}}$. Khi đó, $M+\sqrt{3}m$ bằng

**A.** $-1$. **B.** $1$. **C.** $2$. **D.** $1+2\sqrt{2}$.

*Lời giải*

Ta có $y=\dfrac{\sin x+\cos x+1}{\sqrt{2+\sin 2x}}=\dfrac{\sin x+\cos x+1}{\sqrt{(\sin x+\cos x)^2+1}}$.

Đặt $u=\sin x+\cos x$, điều kiện $|u|\le\sqrt{2}$. Khi đó $y=\dfrac{u+1}{\sqrt{u^2+1}}$.

Xét hàm $y=\dfrac{u+1}{\sqrt{u^2+1}}$ trên đoạn $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$. Ta có $y'=\dfrac{1-u}{(u^2+1)\sqrt{u^2+1}}$; $y'=0\Leftrightarrow u=1$.

Tính $y\left(-\sqrt{2}\right)=\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $y\left(\sqrt{2}\right)=\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $y(1)=\sqrt{2}$

$$\Rightarrow\begin{cases}M=\max y=\sqrt{2}\\ m=\min y=\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\end{cases}\Rightarrow M+\sqrt{3}m=1.$$

**Chọn B.**

**Câu 102.** Biết giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{2}{1-\cos^4 x}+\dfrac{1}{\cos^4 x}$ có dạng $a+b\sqrt{2}$ với a, b là các số nguyên. Tính $S=a+b$.

**A.** $S=3$. **B.** $S=4$. **C.** $S=5$. **D.** $S=7$.

*Lời giải*

Áp dụng bất đẳng thức cộng mẫu, ta được

$$y=\frac{2}{1-\cos^4 x}+\frac{1}{\cos^4 x}\ge\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{1-\cos^4 x+\cos^4 x}=3+2\sqrt{2}.$$

Suy ra $\begin{cases}a=3\\ b=2\end{cases}\Rightarrow S=5$.

**Chọn C.**

**Câu 103.** Cho hàm số $y=\sqrt{1+2\sin^2 x}+\sqrt{1+2\cos^2 x}-1$. Gọi $m, M$ lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số. Khi đó giá trị của $M+m$ gần nhất với số nào sau đây?

**A.** $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{11}{2}$.

*Lời giải*

- Xét $t=\sqrt{1+2\sin^2 x}+\sqrt{1+2\cos^2 x}$

$\Rightarrow t^2=\left(1+2\sin^2 x\right)+\left(1+2\cos^2 x\right)+2\sqrt{\left(1+2\sin^2 x\right)\left(1+2\cos^2 x\right)}=4+2\sqrt{3+\sin^2 2x}$

$\Rightarrow t=\sqrt{4+2\sqrt{3+\sin^2 2x}}\ge\sqrt{4+2\sqrt{3}}=1+\sqrt{3}$

$\Rightarrow y=\sqrt{1+2\sin^2 x}+\sqrt{1+2\cos^2 x}-1\ge\sqrt{3}.$

Dấu "=" xảy ra khi $\sin 2x=0$.

- Lại có $\sqrt{1+2\sin^2 x}+\sqrt{1+2\cos^2 x}\le\sqrt{\left(1^2+1^2\right)\left(1+2\sin^2 x+1+2\cos^2 x\right)}=2\sqrt{2}$

$$\Rightarrow y=\sqrt{1+2\sin^2 x}+\sqrt{1+2\cos^2 x}-1\le 2\sqrt{2}-1.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\sin^2 x=\cos^2 x$.

Vậy $\begin{cases} m=\sqrt{3} \\ M=2\sqrt{2}-1 \end{cases}\Rightarrow M+m=\sqrt{3}+2\sqrt{2}-1\simeq 3,56.$

**Chọn B.**

**Câu 104.** Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=\sin^{2018}x+\cos^{2018}x$ lần lượt là

**A.** $\frac{1}{2^{1008}}$ và 2. **B.** $\frac{1}{2^{1009}}$ và 1. **C.** 0 và 1. **D.** $\frac{1}{2^{1008}}$ và 1.

*Lời giải*

Đặt $a=\sin^2 x,\ b=\cos^2 x$. Ta có

- $\sin^{2018}x+\cos^{2018}x\le\sin^2 x+\cos^2 x=1$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=k\frac{\pi}{2}$.
- $\sin^{2018}x+\cos^{2018}x=2.\left(\frac{a^{1009}+b^{1009}}{2}\right)\ge 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^{1009}=\frac{1}{2^{1008}}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{2^{1008}}$; giá trị lớn nhất bằng 1.

**Chọn D.**

**Câu 105.** Có bao nhiêu giá trị của tham số thực $a$ để hàm số $y=\frac{\cos x+a\sin x+1}{\cos x+2}$ có giá trị lớn nhất bằng 1 ?

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

*Lời giải*

Ta có $y=\dfrac{\cos x+a\sin x+1}{\cos x+2}\Leftrightarrow y(\cos x+2)=\cos x+a\sin x+1$

$\Leftrightarrow a\sin x+(1-y)\cos x=2y-1.$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow a^2+(1-y)^2\ge(2y-1)^2\Leftrightarrow 3y^2-2y-a^2\le 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{1+3a^2}}{3}\le y\le\frac{1+\sqrt{1+3a^2}}{3}.$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \dfrac{1+\sqrt{1+3a^2}}{3}=1\Leftrightarrow\sqrt{1+3a^2}=2\Leftrightarrow 1+3a^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\a=-1\end{array}\right.$.

**Chọn C.**

**Câu 106.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ thuộc $[0;10]$ để hàm số $y=\dfrac{1-m\sin x}{\cos x+2}$ có giá trị nhỏ nhất nhỏ hơn $-2$ ?

**A.** 5. **B.** 6. **C.** 11. **D.** 12.

*Lời giải*

Ta có $y=\dfrac{1-m\sin x}{\cos x+2}\Leftrightarrow y(\cos x+2)=1-m\sin x\Leftrightarrow m\sin x+y\cos x=1-2y.$

Phương trình có nghiệm $y^2+m^2\ge(2y-1)^2\Leftrightarrow 3y^2-4y+1-m^2\le 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2-\sqrt{3m^2+1}}{3}\le y\le\dfrac{2+\sqrt{3m^2+1}}{3}.$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \dfrac{2-\sqrt{3m^2+1}}{3}<-2\Leftrightarrow\sqrt{3m^2+1}>8\Leftrightarrow m^2>21\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>\sqrt{21}\\m<-\sqrt{21}\end{array}\right.$.

$\xrightarrow[m\in[0;10]]{m\in\mathbb{Z}} m\in\{5;6;7;8;9;10\}.$

**Chọn B.**

**Câu 107.** Cho hàm số $y=2\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+2\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)-\sqrt{3}\sin x+a^2$ (với là tham số). Gọi $m,\ M$ lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{2\pi}{3}\right]$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $a$ để $m^2-M\le\dfrac{321}{4}$ ?

**A.** 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 7.

*Lời giải*

Ta có $2\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)-\sqrt{3}\sin x=\cos x-\sqrt{3}\sin x+1=1-2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right).$

Do đó $y=2\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)-2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+a^2+1.$

Đặt $t=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$, vì $x\in\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{2\pi}{3}\right]\Rightarrow t\in[0;1]$

Hàm số trở thành $y=2t^2-2t+a^2+1=2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+a^2+\frac{1}{2}$.

Vì $0\le t\le 1\longrightarrow -\frac{1}{2}\le t-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}\longrightarrow 0\le\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{4}$.

Suy ra $a^2+\frac{1}{2}\le 2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+a^2+\frac{1}{2}\le a^2+1$.

$$\Rightarrow\begin{cases}m=a^2+\frac{1}{2}\\ M=a^2+1\end{cases}\Rightarrow m^2-M\le\frac{321}{4}\Leftrightarrow\left(a^2+\frac{1}{2}\right)^2-\left(a^2+1\right)\le\frac{321}{4}\Leftrightarrow -3\le a\le 3.$$

Suy ra có 7 giá trị nguyên của thỏa.

**Chọn D.**

**Câu 108.** Gọi $S$ là tập tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|\sin^4x+\cos 2x+m\right|$ bằng 2. Hỏi tập $S$ có bao nhiêu phần tử?

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

***Lời giải***

Ta có $\sin^4x+\cos 2x=\sin^4x-2\sin^2x+1=\left(1-\sin^2x\right)^2=\cos^4x\Rightarrow y=\left|\cos^4x+m\right|$.

Vì $0\le\cos^4x\le 1\Rightarrow m\le\cos^4x+m\le 1+m$.

Suy ra $\min y=\min\left\{|m|,|m+1|\right\}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|m|\ge|m+1|\\ |m+1|=2\end{cases}\\ \begin{cases}|m+1|\ge|m|\\ |m|=2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-3\\ m=2\end{array}\right.$. Vậy $S=\{-3;2\}$.

**Chọn B.**

**Câu 109.** Cho $x$, $y$ là các số thực thỏa mãn $\cos 2x+\cos 2y=1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\tan^2x+\tan^2y$ bằng

**A.** $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{8}{3}$. **C.** 3.

***Lời giải***

Ta có $P=\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)+\left(\frac{1}{\cos^2y}-1\right)=2\left(\frac{1}{1+\cos 2x}+\frac{1}{1+\cos 2y}\right)-2$.

Áp dụng BĐT cộng mẫu, ta được $P\ge 2\left(\frac{(1+1)^2}{2+\cos 2x+\cos 2y}\right)-2=2.\frac{4}{2+1}-2=\frac{2}{3}$.

**Chọn B.**

**Câu 110.** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(\tan x)=\frac{1}{2}\sin 2x-\cos 2x$ với mọi $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Với a, b là hai số thực thay đổi thỏa mãn $a+b=1$, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=f(a).f(b)$ bằng

**A.** $\frac{1}{25}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{5-3\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\frac{5+3\sqrt{5}}{2}$.

***Lời giải***

Theo giả thiết, ta có $f(\tan x)=\frac{\tan x}{1+\tan^2 x}-\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\frac{\tan^2 x+\tan x-1}{1+\tan^2 x}\Rightarrow f(t)=\frac{t^2+t-1}{t^2+1}$.

Do đó $S=f(a).f(b)=f(a).f(1-a)=\frac{a^2+a-1}{a^2+1}.\frac{(1-a)^2+(1-a)-1}{(1-a)^2+1}\geq\frac{5-3\sqrt{5}}{2}$.

**Chọn C.**

**Câu 111.** Cho hai số thực x, y thuộc $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ và thỏa mãn $\cos 2x+\cos 2y+2\sin(x+y)=2$. Giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{\cos^4 x}{y}+\frac{\cos^4 y}{x}$ bằng

**A.** $\frac{2}{3\pi}$. **B.** $\frac{3}{\pi}$. **C.** $\frac{2}{\pi}$. **D.** $\frac{5}{\pi}$.

***Lời giải***

Ta có $\cos 2x+\cos 2y+2\sin(x+y)=2\Leftrightarrow\sin^2 x+\sin^2 y=\sin(x+y)$.

Suy ra $x+y=\frac{\pi}{2}$. Áp dụng BĐT cộng mẫu $\frac{a^2}{m}+\frac{b^2}{n}\geq\frac{(a+b)^2}{m+n}$, ta được

$$P\geq\frac{\left(\cos^2 x+\cos^2 y\right)^2}{x+y}=\frac{\left[\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]^2}{x+y}=\frac{\left[\cos^2 x+\sin^2 x\right]^2}{x+y}=\frac{2}{\pi}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=\frac{\pi}{4}$.

**Chọn C.**

***Nhận xét.*** Việc suy ra $x+y=\frac{\pi}{2}$ được chứng minh như sau:

Với $x, y\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ suy ra $\frac{\pi}{2}-x$, $\frac{\pi}{2}-y$ cùng thuộc $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, hàm $y=\sin x$ đồng biến.

- Nếu $x+y>\frac{\pi}{2}\Rightarrow\begin{cases}x>\frac{\pi}{2}-y\Rightarrow\sin x>\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\cos y\\ y>\frac{\pi}{2}-x\Rightarrow\sin y>\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x\end{cases}$

$$\Rightarrow\sin^2x+\sin^2y=\sin x.\sin x+\sin y.\sin y>\sin x.\cos y+\sin y.\cos x=\sin(x+y)$$

Mâu thuẫn

- Tương tự cho $x+y<\frac{\pi}{2}$.
- Trường hợp $x+y=\frac{\pi}{2}$: thỏa mãn.

**Câu 112.** Cho $a,\ b,\ c$ là các số thực thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=4$. Tìm giá trị lớn nhất $M$ trong tất cả các hàm số $y=a+b\sqrt{\sin x}+c\sqrt{\cos x}$ với $x\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right]$.

**A.** $M=\sqrt{1+\sqrt{2}}$. **B.** $M=1+\sqrt{2}$. **C.** $M=2\sqrt{1+\sqrt{2}}$. **D.** $M=2\left(1+\sqrt{2}\right)$.

***Lời giải***

Ta có $\left(a+b\sqrt{\sin x}+c\sqrt{\cos x}\right)^2\le\left(a^2+b^2+c^2\right)(1+\sin x+\cos x)$

$$=4\left[1+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]\le4\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Suy ra $a+b\sqrt{\sin x}+c\sqrt{\cos x}\le2\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{b}{\sqrt{\sin x}}=\frac{c}{\sqrt{\cos x}}\\ a^2+b^2+c^2=4\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1,\ x\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{2\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}};b=c=\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\\ x=\frac{\pi}{4}\end{cases}$.

**Chọn C.**

**Câu 113.** Cho hai số thực dương $a,\ b$ thỏa mãn $\sin(2-2ab)-\sin(a+b)=2ab+a+b-2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=a+2b$ bằng

**A.** $\frac{2\sqrt{10}-3}{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{10}-7}{2}$. **C.** $\frac{2\sqrt{10}-1}{2}$. **D.** $\frac{2\sqrt{10}-5}{2}$.

***Lời giải***

Ta có $\sin(2-2ab)-\sin(a+b)=2ab+a+b-2$

$\Leftrightarrow\sin(2-2ab)+(2-2ab)=\sin(a+b)+(a+b)$

Xét hàm $f(t)=\sin t+t$ với $t\in\mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=\cos t+1\ge0\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến.

Mà $f(2-2ab)=f(a+b)$ nên $2-2ab=a+b\Leftrightarrow b=\frac{2-a}{2a+1}$ (vì $b>0\Rightarrow a<2$).

Khi đó $S=a+2b=a+\frac{4-2a}{2a+1}$. Khảo sát hàm số trên $(0;2)$ ta được $\min S=\frac{2\sqrt{10}-3}{2}$.

**Chọn A.**

**Câu 114.** Cho hai số thực dương $a, b$ thỏa mãn $\cos(x+y+1)+3=\cos(3xy)+9xy-3x-3y$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=x(y+2)$ bằng

**A.** $\dfrac{11+4\sqrt{7}}{9}$. **B.** $1$. **C.** $\dfrac{28+8\sqrt{7}}{21}$. **D.** $\dfrac{7+2\sqrt{7}}{21}$.

*Lời giải*

Ta có $\cos(x+y+1)+3=\cos(3xy)+9xy-3x-3y$

$\Leftrightarrow \cos(x+y+1)+3(x+y+1)=\cos(3xy)+3(3xy)$

Xét hàm $f(t)=\cos t+3t$ với $t\in\mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=-\sin t+3>0 \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến.

Mà $f(x+y+1)=f(3xy)$ nên $x+y+1=3xy \Leftrightarrow x=\dfrac{y+1}{3y-1}$.

Khi đó $S=\dfrac{(y+1)(y+2)}{3y-1}=\dfrac{y^2+3y+2}{3y-1}$. Khảo sát ta tìm được $\min S=\dfrac{11+4\sqrt{7}}{9}$.

**Chọn A.**

# LỜI KẾT

Vậy là chúng ta đã đi đến trang cuối cùng của tuyển tập này, tuy bài viết chưa thực sự là hay nhưng hy vọng những kiến thức mà mình đưa vào trong bài viết có thể giúp ích được các bạn trong quá trình học tập. Ngoài ra có thể còn một vài thiếu xót trong tuyển tập này, mong mọi người bỏ qua. Một lần nữa gửi lời cảm ơn đến những người có đóng góp cho bài viết này và chúc các bạn một mùa ôn thi thành công nhé!